

Оптимизация в задачах: Справочник по теории

Профильный уровень · Задача №17 · Необходимый минимум для решения

1. В чём смысл задач на оптимизацию?

Задачи на оптимизацию (поиск наибольшего или наименьшего значения) моделируют реальные жизненные и физические процессы. От нас требуется найти идеальные условия, при которых процесс работает максимально эффективно.

Например:

- Настроить реостат так, чтобы генератор выдавал **максимальную мощность**.
- Подобрать скорость катера так, чтобы **расход топлива был минимальным**.
- Найти период волны, при котором амплитуда качки корабля станет **наибольшей** (резонанс).

В отличие от простых задач первой части, здесь мы не можем просто «подставить числа и посчитать». Мы должны составить функцию $f(x)$ и найти её вершину («гору») или впадину («яму») с помощью производной.

2. Универсальный алгоритм решения

Каждая задача решается по строгому алгоритму из четырёх шагов:

Шаг 1: Конструирование функции.

Берем исходную формулу (например, $P = I^2 R$). Подставляем в неё все известные константы из условия и выражаем через *одну переменную*. Получаем функцию, например, $P(R) = \frac{14400R}{(2+R)^2}$.

Шаг 2: Поиск производной $f'(x)$.

Чаще всего это производная дроби. Применяем правило:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Шаг 3: Приравнивание к нулю.

Решаем уравнение $f'(x) = 0$. Знаменатель в квадрате всегда положителен, поэтому достаточно приравнять к нулю только числитель. Находим корни (критические точки).

Шаг 4: Обоснование экстремума.

Обязательный шаг для получения полного балла! Рисуем числовую прямую, отмечаем найденный корень и расставляем знаки производной на интервалах.

- Смена знака с $+$ на $-$ означает **точку максимума**.
- Смена знака с $-$ на $+$ означает **точку минимума**.

3. Лайфхаки и замены (Упрощаем жизнь)

Иногда функции выглядят устрашающе (например, содержат многоэтажные дроби и корни). Вычислять их производные «в лоб» — огромный риск ошибиться в знаках.

Правило корня:

Поскольку функция $y = \sqrt{t}$ монотонно возрастает, максимум корня достигается ровно в той же точке, где достигается максимум подкоренного выражения. Значит, сам корень при поиске производной можно отбросить!

Замены:

Если в задаче переменная всюду стоит в квадрате (например, τ^2 или ω^2), введите замену $x = \tau^2$. Это понизит степени и превратит сложную дробь в обычную квадратичную функцию.

Пример вывода формулы резонанса:

Рассмотрим амплитуду $A(\tau) = \frac{k\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}}$. Внесем τ^2 под корень как τ^4 . Чтобы дробь была максимальной, подкоренное выражение в знаменателе должно быть **минимальным**:

$$f(\tau) = \frac{(T^2 - \tau^2)^2 + n\tau^2 T^2}{\tau^4} = \left(\frac{T^2}{\tau^2} - 1\right)^2 + n\frac{T^2}{\tau^2}$$

Сделаем замену $x = \frac{T^2}{\tau^2}$. Раскроем квадрат:

$$(x - 1)^2 + nx = x^2 - 2x + 1 + nx = x^2 + (n - 2)x + 1$$

Мы получили обычную квадратичную параболу $y = x^2 + (n - 2)x + 1$, ветви которой направлены вверх. Её минимум всегда находится в вершине:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{n - 2}{2} = 1 - \frac{n}{2}$$

Делаем обратную замену, и формула готова:

$$\frac{T^2}{\tau^2} = 1 - \frac{n}{2} \implies \tau^2 = \frac{T^2}{1 - n/2} \implies \tau = \frac{T}{\sqrt{1 - n/2}}$$

4. Здравый смысл и ОДЗ

Математика слепа — при решении квадратного уравнения числителя она может выдать вам два корня, например, $\omega = 15$ и $\omega = -15$. Здесь нужно вспомнить о физическом смысле величин:

- Сопротивление реостата $R \geq 0$.
- Время процесса $t \geq 0$.
- Частота или период $\omega > 0, \tau > 0$.
- Концентрация вещества $x \geq 0$.

Отрицательные корни следует отбрасывать сразу, с пояснением «*не удовлетворяет физическому смыслу задачи*». При проверке знаков производной на оси достаточно рассматривать только положительную полуось $(0; +\infty)$.