

Статистика. Новое задание в ЕГЭ профиль

Профильный уровень · Первая часть · Автор: ЕГЭматика (vk.com/egemathika)

Задание 1

Организаторы лотереи выпустили 20 000 билетов. Выигрыши распределены следующим образом:

Выигрыш (в рублях)	200	1 000	5 000	50 000	100 000
Число выигрышных билетов	600	180	64	11	2

Найдите математическое ожидание величины «выигрыш на один билет». Ответ дайте в рублях.

$$\begin{aligned}\text{Решение: } E(X) &= \frac{1}{20\,000} \cdot (200 \cdot 600 + \\ &+ 1000 \cdot 180 + 5000 \cdot 64 + \\ &+ 50000 \cdot 11 + 100000 \cdot 2) = \\ &= \frac{1\,370\,000}{20\,000} = 68,5.\end{aligned}$$

Ответ: 68,5

Задание 2

В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 800 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш (руб.)	20	70	300	4000
Количество билетов	777	14	6	3

$$\begin{aligned}\text{Решение: } E(X) &= \frac{1}{800} \cdot (20 \cdot 777 + 70 \cdot 14 + \\ &+ 300 \cdot 6 + 4000 \cdot 3) = \\ &= \frac{30\,320}{800} = 37,9.\end{aligned}$$

$$\text{Разность: } 50 - 37,9 = 12,1.$$

Ответ: 12,1

Задание 3

В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите $E(X)$ — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-3	2	6	8
Вероятности	0,1	0,45	0,15	0,3

$$\begin{aligned}\text{Решение: } E(X) &= -3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,45 + \\ &+ 6 \cdot 0,15 + 8 \cdot 0,3 = 3,9.\end{aligned}$$

Ответ: 3,9

Задание 4

Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит 4 значения: 2, 4, 9, 1 и 3, 1. По этой выборке найдите несмещённую оценку дисперсии генеральной совокупности.

Решение: Формула несмещённой дисперсии: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$.

Выборочное среднее: $\bar{x} = 2,75$.

Квадраты отклонений от среднего:

$$(-0,75)^2 = 0,5625$$

$$2,15^2 = 4,6225$$

$$(-1,75)^2 = 3,0625$$

$$0,35^2 = 0,1225$$

Сложим их и разделим на $n - 1 = 3$:

$$S^2 = \frac{8,37}{3} = 2,79.$$

Ответ: 2,79

Задание 5

Монету подбрасывают до тех пор, пока орёл не выпадет 2 раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

Решение: Вероятность орла $p = 1/2$. Ожидаемое число бросков до первого успеха (орла) равно $1/p = 2$.

Так как броски независимы, чтобы дождаться второго орла, нужно в среднем совершить ещё столько же бросков. Итого:

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{p} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4

Задание 6

Игральный кубик бросают до тех пор, пока четвёрка не выпадет 3 раза, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

Решение: Вероятность выпадения четвёрки $p = 1/6$. Матожидание числа бросков до одного успеха равно $1/p = 6$.

Поскольку нам нужно дождаться 3 успехов, а результаты бросков не зависят друг от друга, умножаем на 3:

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{p} = 3 \cdot 6 = 18.$$

Ответ: 18

Задание 7

Про случайную величину X известно, что $E(X) = 6$ и $D(X) = 1$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq 4$ или $X \geq 8$ », которую даёт неравенство Чебышёва.

Решение: Событие « $X \leq 4$ или $X \geq 8$ » означает, что величина отделилась от своего среднего ($E(X) = 6$) на 2 или более в обе стороны. То есть $|X - 6| \geq 2$.

Неравенство Чебышёва:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

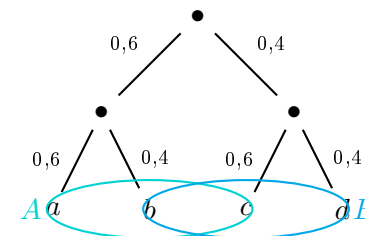
Здесь отклонение $\varepsilon = 2$.

Подставляем: $P \leq \frac{1}{2^2} = 0,25$.

Ответ: 0,25

Задание 8

На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a , b и c , а событию B благоприятствуют элементарные события b , c и d . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B .



Решение: Сначала найдем вероятности нужных исходов (перемножая числа на ветвях):

$$P(b) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$$

$$P(c) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$$

$$P(d) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

Событие B состоит из b, c, d :

$$P(B) = 0,24 + 0,24 + 0,16 = 0,64.$$

Пересечение $A \cap B$ состоит из b, c :

$$P(A \cap B) = 0,24 + 0,24 = 0,48.$$

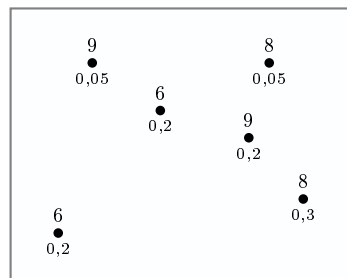
Формула условной вероятности:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,48}{0,64} = 0,75.$$

Ответ: 0,75

Задание 9

На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S . Точками изображены все элементарные события. Около каждой точки указано значение случайной величины X и вероятность этого элементарного события. Найдите вероятность события $X = 6$.



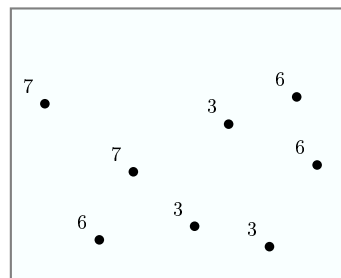
Решение: Вероятность события равна сумме вероятностей соответствующих точек:

$$P(X = 6) = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Ответ: 0,4

Задание 10

На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновероятны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X . Найдите вероятность события $X = 7$.



Решение: Всего 8 равновероятных исходов. Благоприятных (с $X = 7$) — две точки.

$$P(X = 7) = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25