

Планиметрия ЕГЭ. Средний уровень.

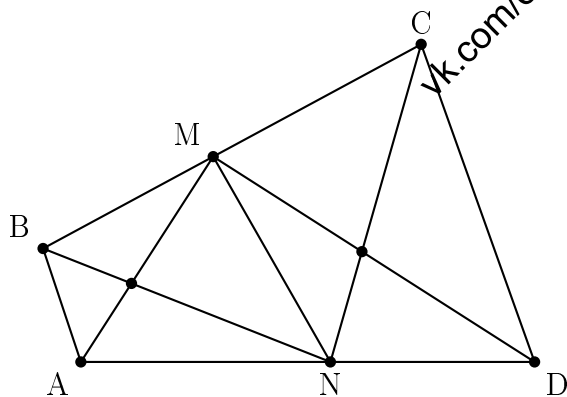
Задача 1. ЕГЭ-2015, основная волна.

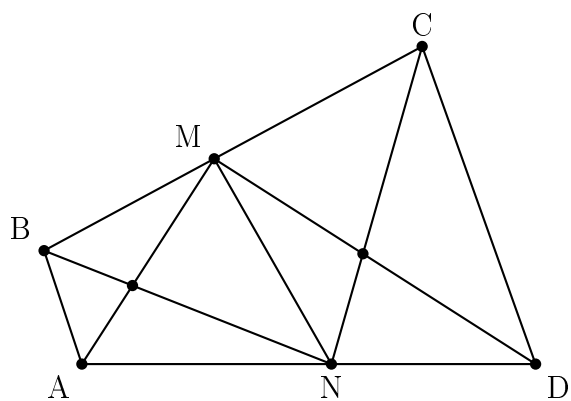
Теория: • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • признак равнобедренного треугольника • средняя линия в треугольнике • площадь треугольника через произведение сторон • равенство треугольников по трём сторонам • теорема о пропорциональных отрезках • медиана в прямоугольном треугольнике, проведённая из вершины прямого угла

Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD .

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 1 : 3$ а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM , DM , BN и CN , равна 18.



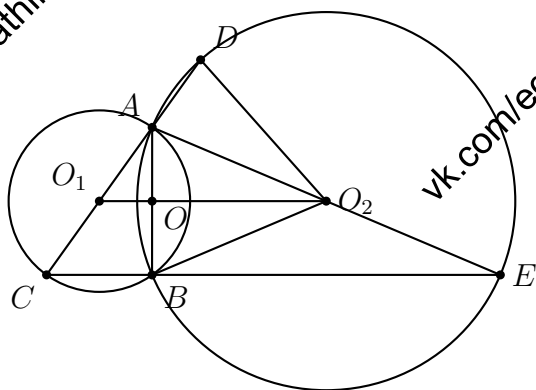


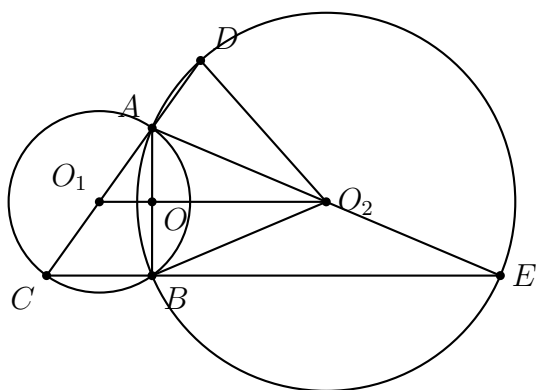
Задача 2. ЕГЭ-2017, основная волна.

Теория: • подобие по двум углам • признак и свойства равнобедренного треугольника • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • равенство треугольников по трём сторонам • вписанные углы, опирающиеся на одну дугу • вписанный угол, опирающийся на диаметр

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.

- Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.
- Найдите AD , если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.





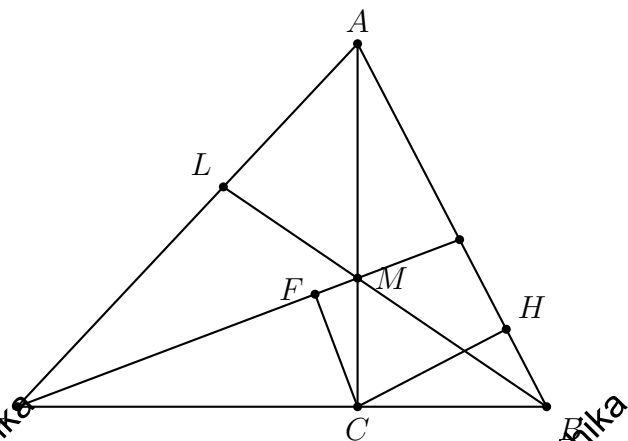
Задача 3. ЕГЭ-2020, основная волна.

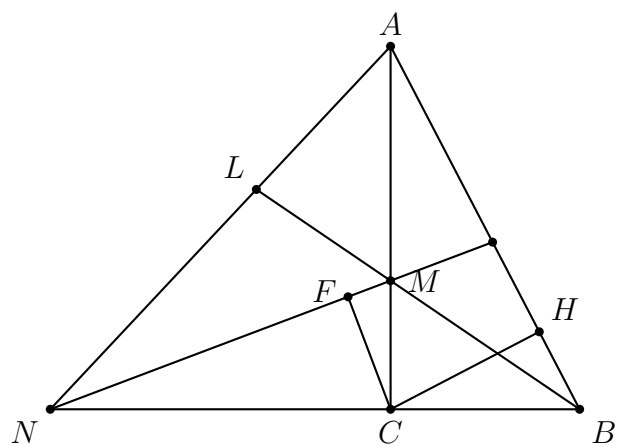
Теория: • сумма углов треугольника • теорема Пифагора • признак и свойства равнобедренного треугольника • сумма углов четырёхугольника • как пересекаются высоты в треугольнике

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причем $CM = BC$ и $CN = AC$.

а) Отрезки CH и CF — высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны.

б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L . Найдите LM , если $BC = 4$ и $AC = 8$.



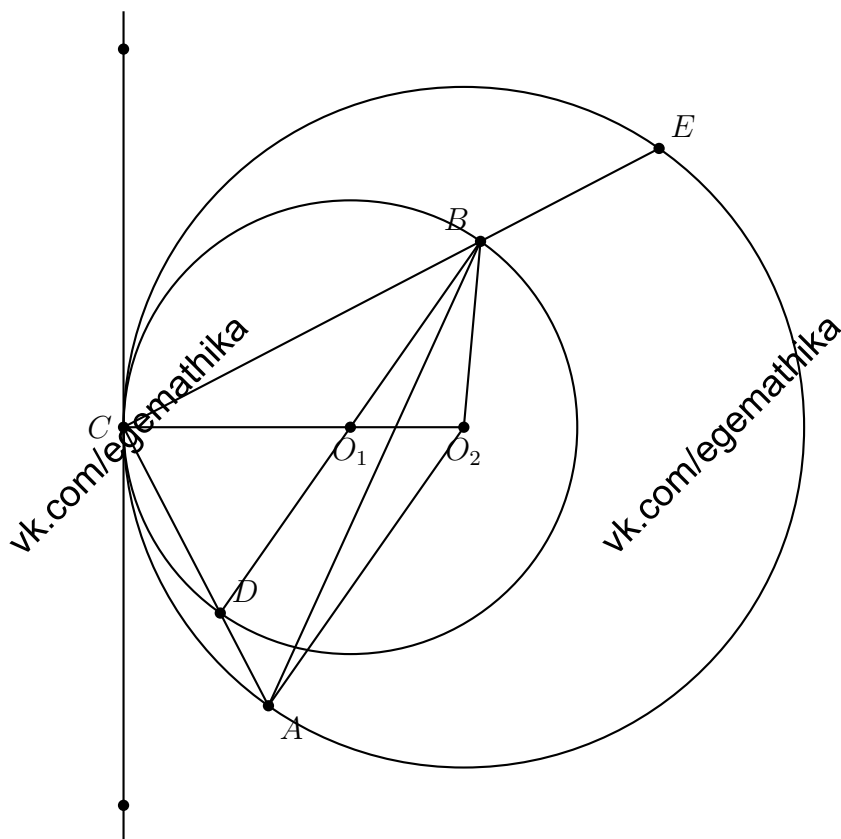


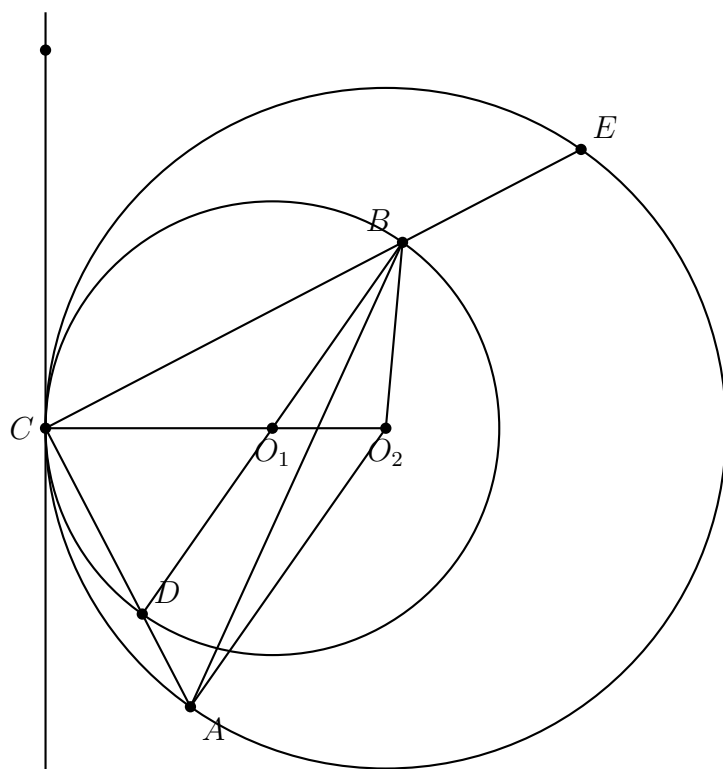
Задача 4. ЕГЭ-2020, основная волна.

Теория: • теорема Пифагора • подобие по двум углам • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • центральный и вписанный угол, опирающиеся на одну дугу • угол между касательной и хордой

Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D . Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E .

- Докажите, что AE параллельно BD .
- Найдите AC , если радиусы окружностей равны 8 и 15.





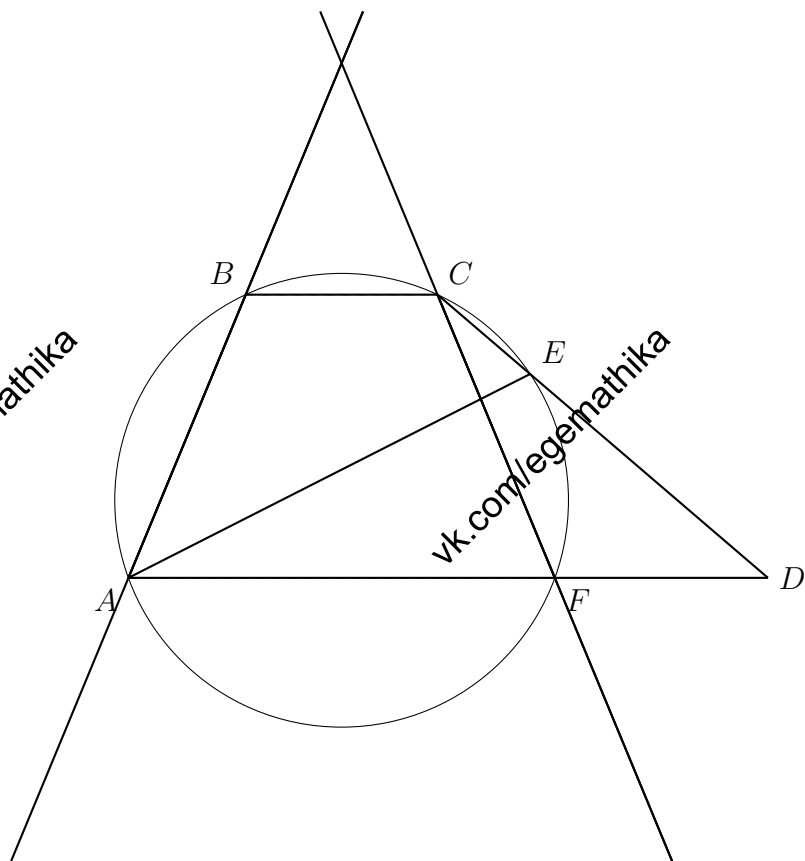
Задача 5. ЕГЭ-2021, основная волна.

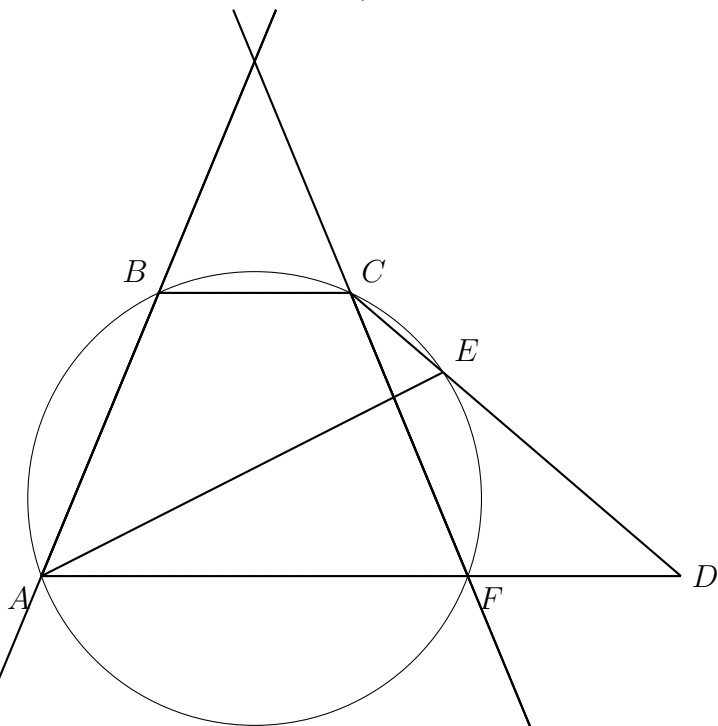
Теория: • сумма углов треугольника • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • признак равнобедренного треугольника • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • вписанные углы, опирающиеся на одну дугу • какую трапецию можно вписать в окружность • площадь трапеции

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность, описанная около треугольника ABC , пересекает боковую сторону CD в точке E , а основание AD в точке F , причём $AB = FD$.

а) Докажите, что $\angle EAD = \angle EDA$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5$, $BC = 3$, а прямые AE и CF перпендикулярны.



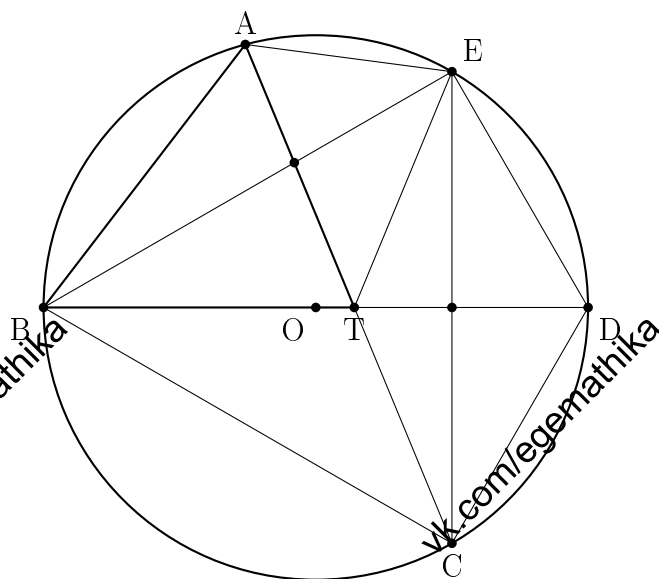


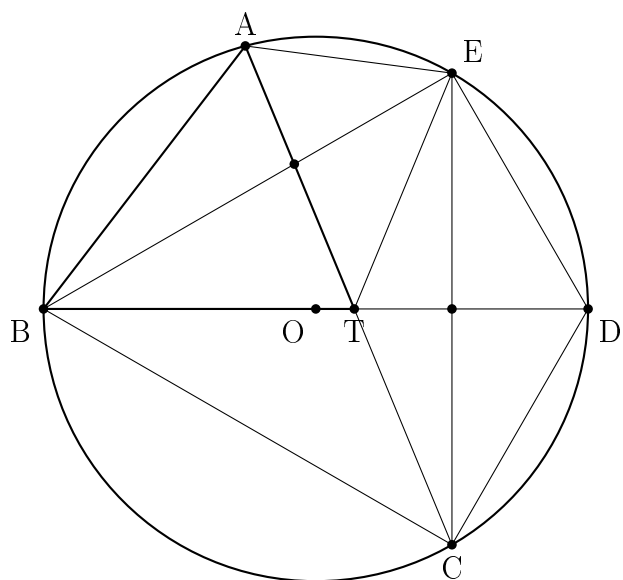
Задача 6. ЕГЭ-2021, основная волна.

Теория: • сумма углов треугольника • теорема Пифагора • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • вписанный угол, опирающийся на диаметр • площадь треугольника через основание и высоту • теорема о произведении отрезков хорд • равенство хорд, стягивающих равные дуги • равенство треугольников по двум углам и стороне между ними • теорема косинусов • свойства равнобедренного треугольника • хорда, перпендикулярная диаметру

Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T .

- Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.
- Найдите площадь треугольника ABT , если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$.





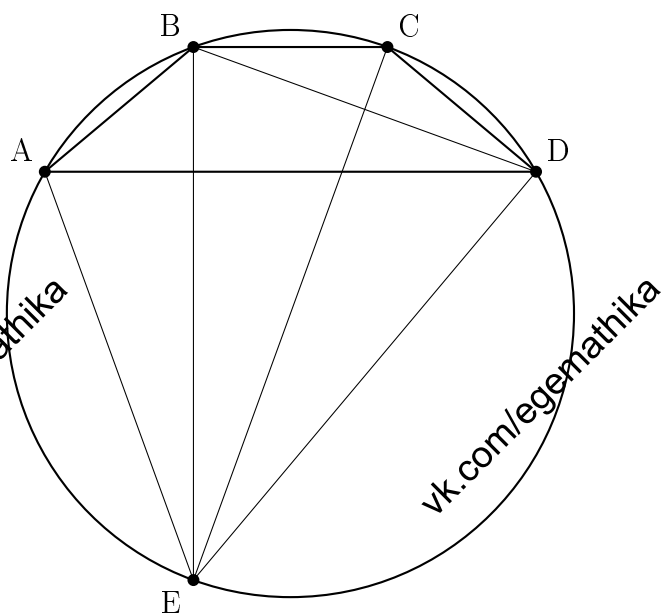
Задача 7. ЕГЭ-2021, основная волна.

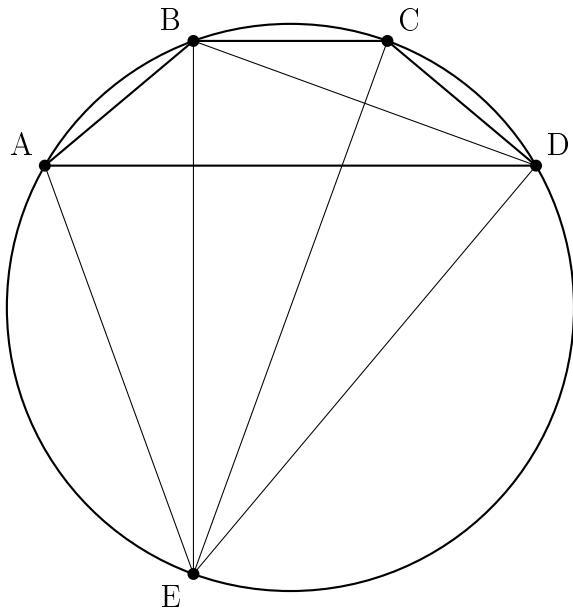
Теория: • теорема Пифагора • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • свойства равнобедренного треугольника • критерий вписанного четырёхугольника (равенство вписанных углов) • сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника • равенство треугольников по трём сторонам • какую трапецию можно вписать в окружность • площадь трапеции • равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними

В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне. На плоскости выбрали точку E такую, что прямая BE перпендикулярна прямой AD , а прямая CE перпендикулярна прямой BD .

а) Докажите, что $\angle AEB = \angle ADB$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 32$, $\cos \angle AEB = \frac{3}{4}$.





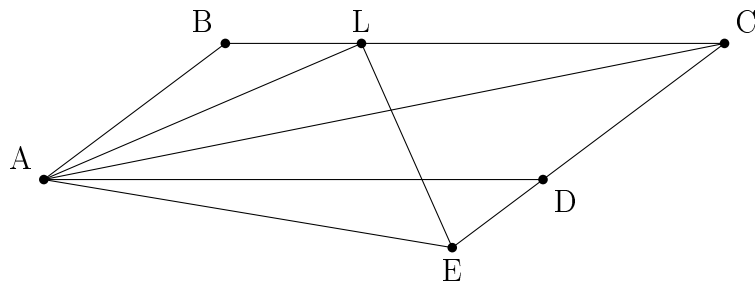
Задача 8. ЕГЭ-2022, основная волна.

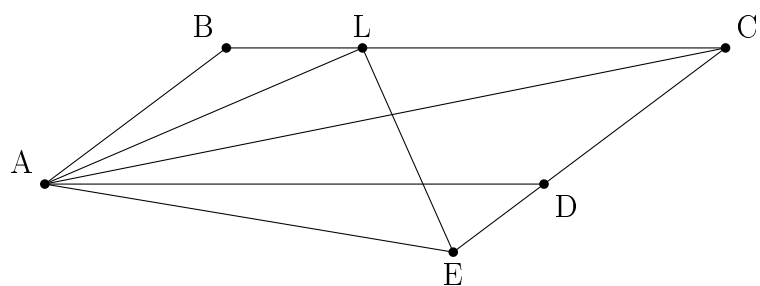
Теория: • подобие треугольников по двум углам • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • признак и свойства равнобедренного треугольника • равенство треугольников по трём сторонам

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD . Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.

а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.

б) Найдите EL , если $AC = 12$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{4}$.





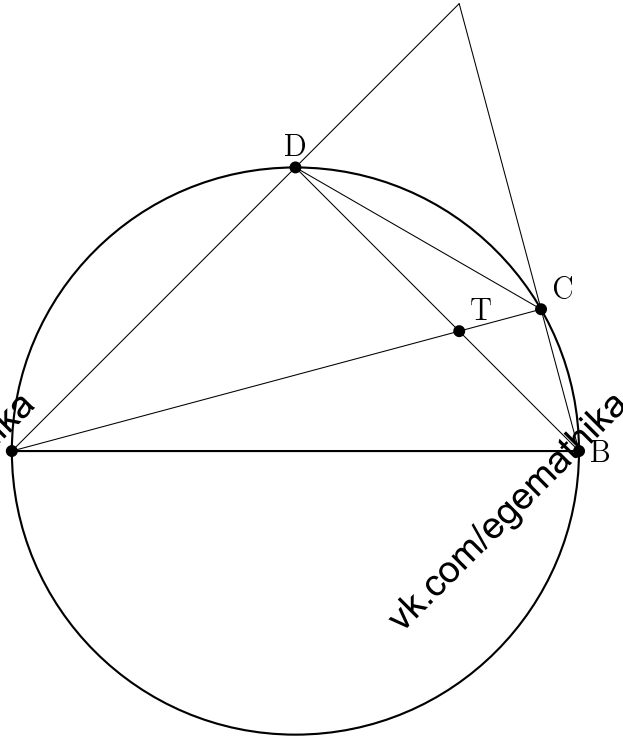
Задача 9. ЕГЭ-2022, основная волна.

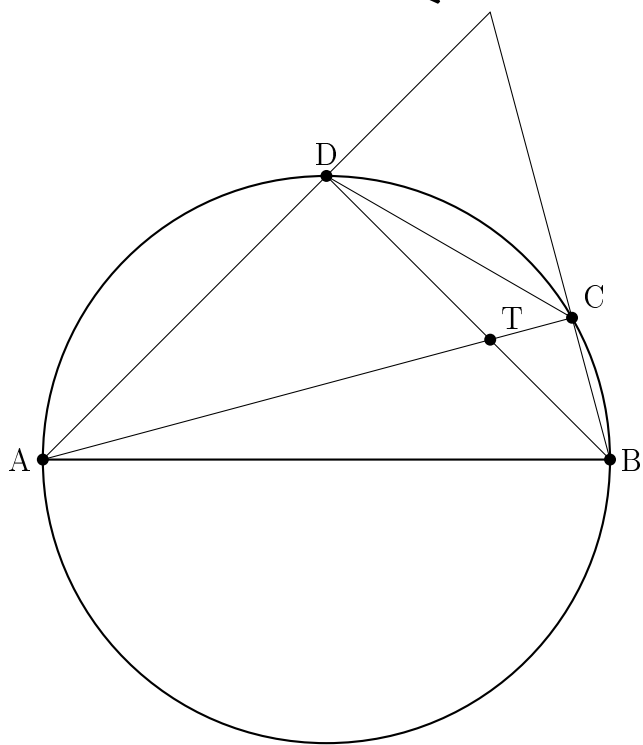
Теория: • теорема Пифагора • подобие по двум углам • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • критерий вписанного четырёхугольника (равенство вписанных углов) • вписанный угол, опирающийся на диаметр • равенство хорд, стягивающих равные дуги

На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B . Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.

а) Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.

б) Прямые AC и BD пересекаются в точке T . Найдите отношение $AT : TC$, если $\cos \angle ABC = \frac{3}{8}$.





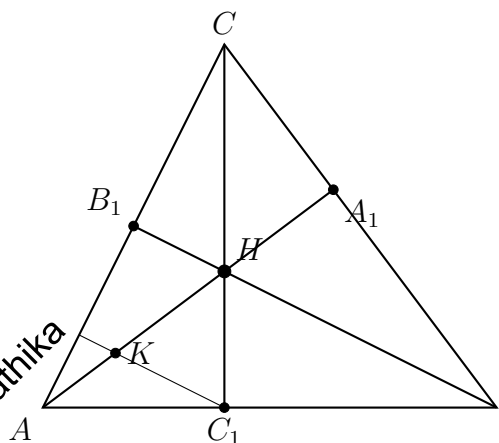
Задача 10. ЕГЭ-2022, основная волна.

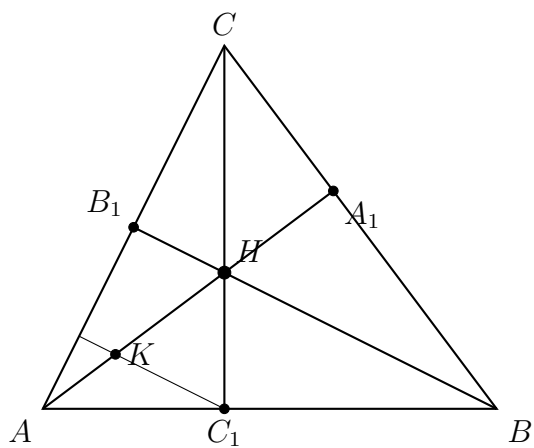
Теория: • сумма углов треугольника • теорема Пифагора • подобие треугольников по двум углам • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • теорема косинусов • отношение площадей подобных треугольников

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 , которые пересекаются в точке H . Через точку C_1 провели прямую, параллельную BB_1 . Данная прямая пересекает AA_1 в точке K .

а) Докажите, что $AB \cdot HK = C_1H \cdot BC$.

б) Найдите отношение площадей треугольников ABC и C_1HK , если известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = \sqrt{31}$.





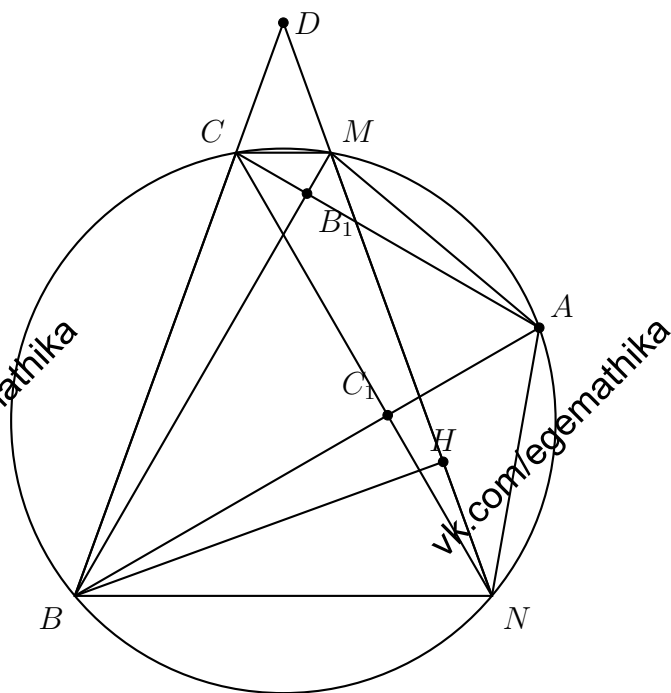
Задача 11. ЕГЭ-2022, основная волна.

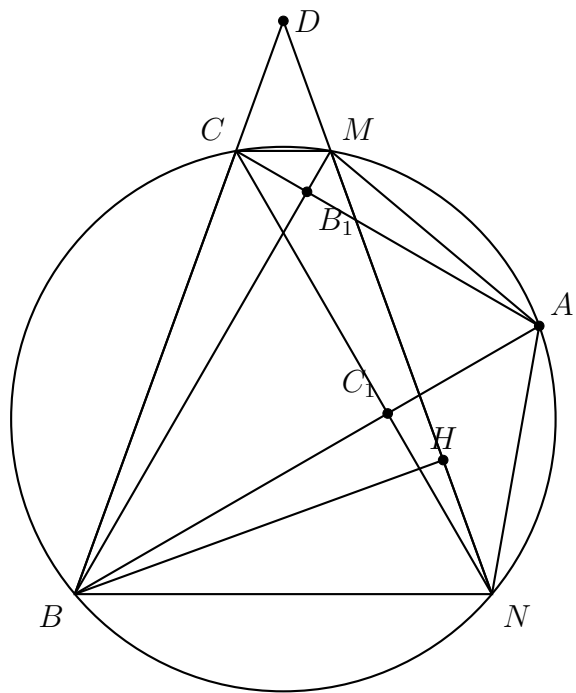
Теория: • сумма углов треугольника • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • признак равнобедренного треугольника • критерий вписанного четырёхугольника (по вписанным углам) • сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника • площадь треугольника через основание и высоту • равенство хорд, стягивающих равные дуги

Биссектриса BB_1 и высота CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках M и N . Известно, что $\angle BCA = 85^\circ$ и $\angle ABC = 40^\circ$.

а) Докажите, что $CN = BM$.

б) Пусть MN и BC пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 7.





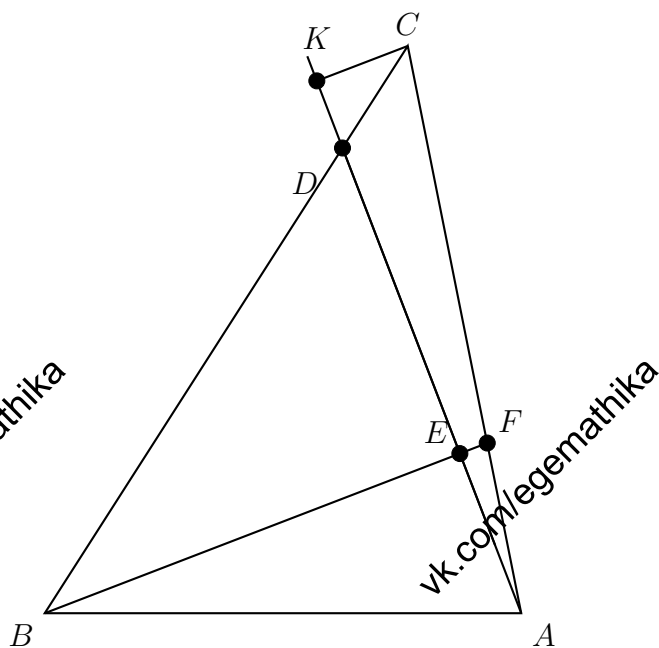
Задача 12. ЕГЭ-2022, основная волна.

Теория: • подобие треугольников по двум углам • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • свойства равнобедренного треугольника • теорема о пропорциональных отрезках • площадь треугольника по сторонам и углу между ними • теорема о биссектрисе

В треугольнике ABC на стороне BC отметили точку D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF пересекает AD в точке E . Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CK .

а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.

б) Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника $CDEF$, если известно, что $BD : DC = 3 : 2$.



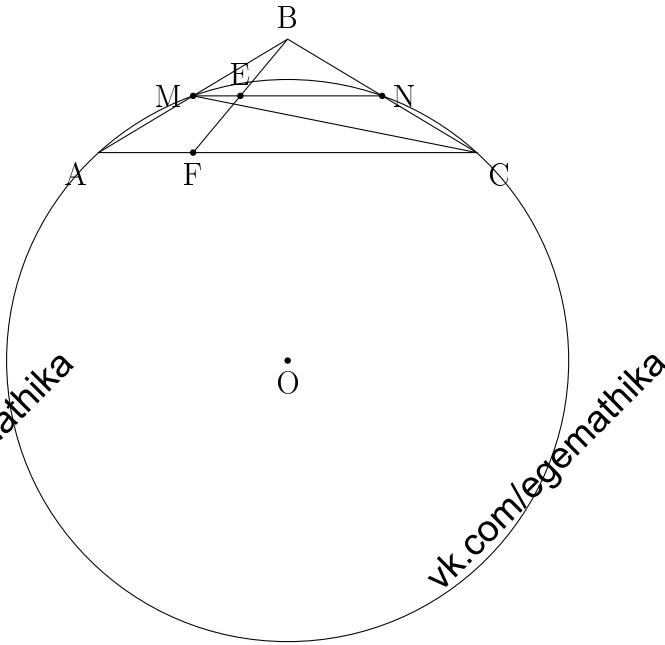
Задача 13. ЕГЭ-2022, основная волна.

Теория: • сумма углов треугольника • признак равнобедренного треугольника • теорема синусов • теорема косинусов • средняя линия в треугольнике • какую трапецию можно вписать в окружность

В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Известно, что около четырёхугольника $AMNC$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) На стороне AC отмечена точка F , такая что $\angle AFB = 135^\circ$. Отрезок BF пересекает отрезок MN в точке E . Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $AMNC$, если $\angle ABC = 120^\circ$ и $EF = 6\sqrt{2}$.





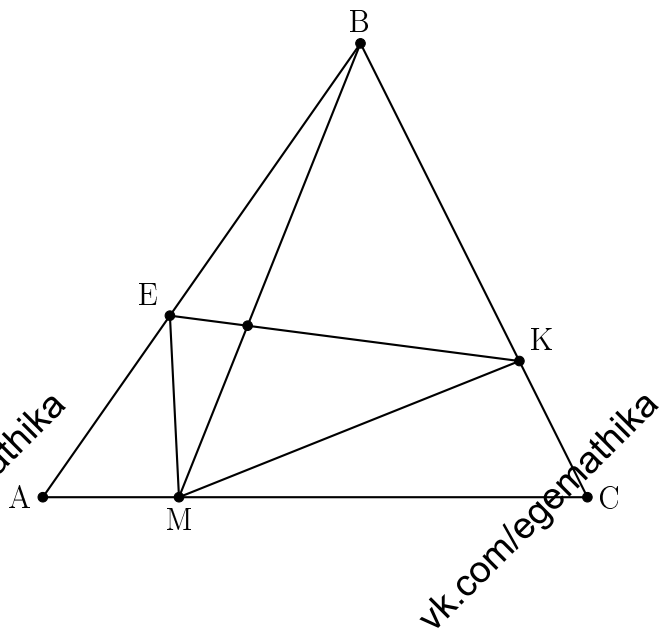
Задача 14. ЕГЭ-2023, основная волна.

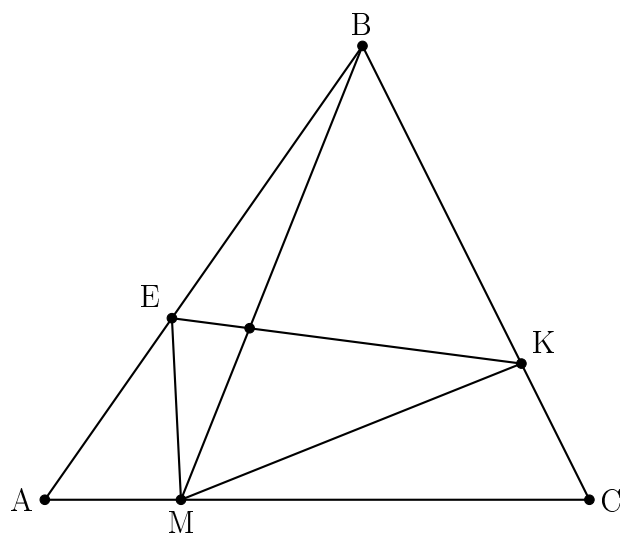
Теория: • сумма углов треугольника • подобие треугольников по двум углам • свойства равнобедренного треугольника • теорема косинусов • равенство треугольников по трём сторонам • отношение площадей подобных треугольников

Дан равносторонний треугольник ABC . На стороне AC выбрана точка M , серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает сторону AB в точке E , а сторону BC в точке K .

а) Докажите, что $\angle AEM = \angle CMK$.

б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK , если $AM : CM = 1 : 4$.





Задача 15. ЕГЭ-2024, основная волна.

Теория: • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • признак равнобедренного треугольника • критерий параллелограмма • теорема о пересекающихся хордах • равенство хорд, стягивающих равные дуги

$ABCDE$ — вписанный пятиугольник. $AB = CD = 5$, $BC = DE = 8$.

- а) Докажите, что $AC = CE$.
б) Найдите BE , если известно, что $AD = 10$.

