

Планиметрия ЕГЭ. Сложный уровень.

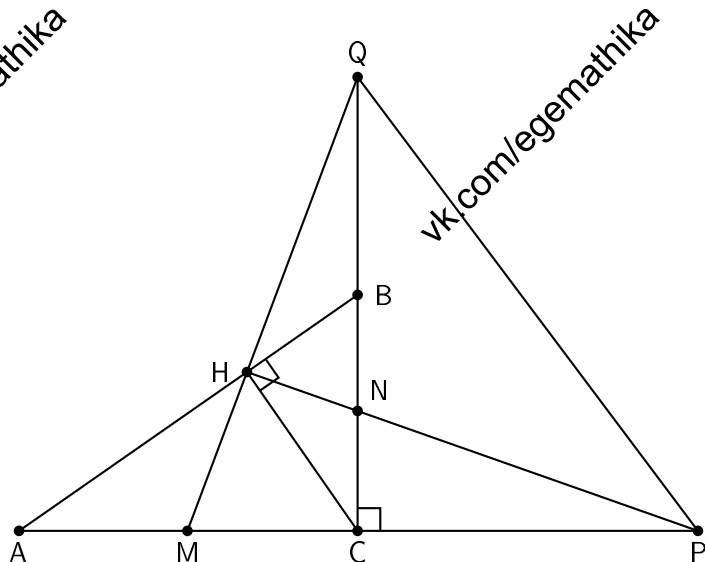
Задача 1. Основная волна 2016.

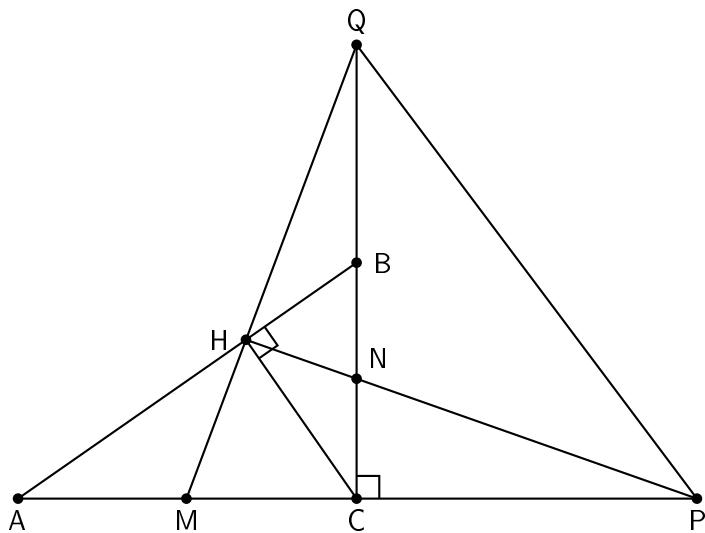
Теория: • сумма углов треугольника • теорема Пифагора • теорема косинусов • критерий и свойства равнобедренного треугольника • площадь треугольника через основание и высоту • теорема о пропорциональных отрезках • медиана в прямоугольном треугольнике, проведённая из вершины прямого угла • тригонометрия в прямоугольном треугольнике • метод координат

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH , а Q — точка пересечения прямых BC и MH . Найдите площадь треугольника PQM , если $AH = 4$ и $BH = 2$.



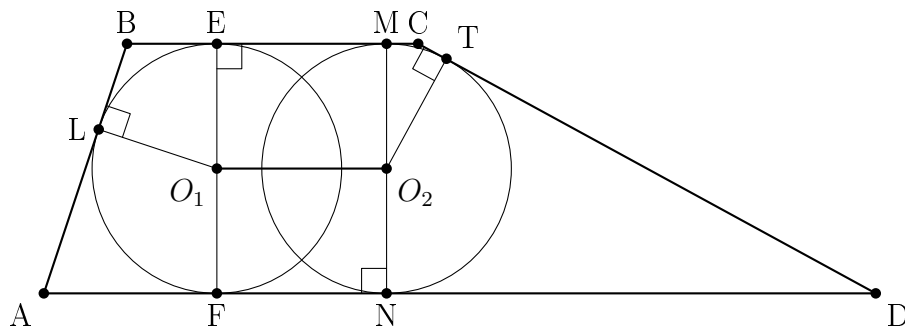


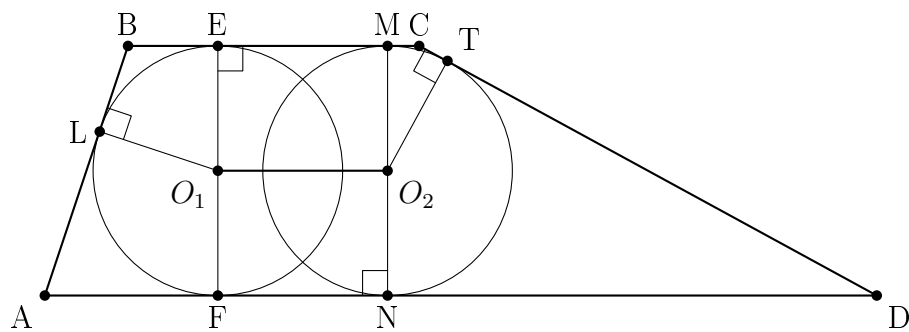
Задача 2. Основная волна 2018.

Теория: • метод координат

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD .

- а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2 , если $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.



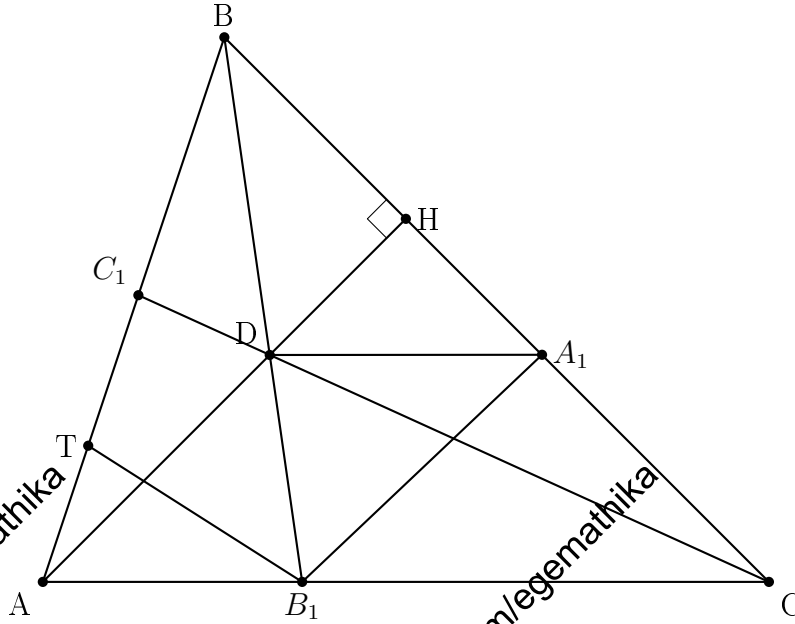


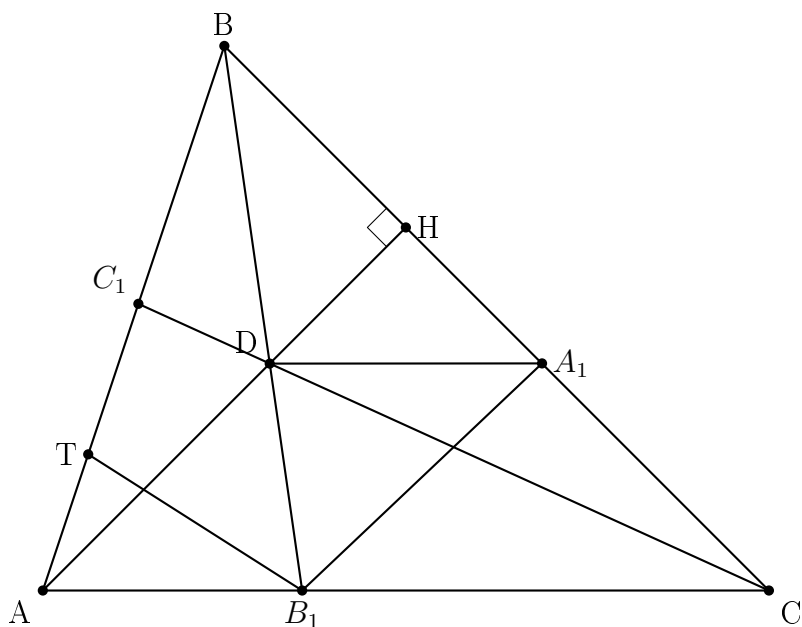
Задача 3. Основная волна 2020.

Теория: • метод координат

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 7 : 12$, $BA_1 : A_1C = 3 : 1$, $AB_1 : B_1C = 3 : 4$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

- а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 — параллелограмм.
б) Найдите CD , если $AD \perp BC$, $AC = 21$, $BC = 16$.





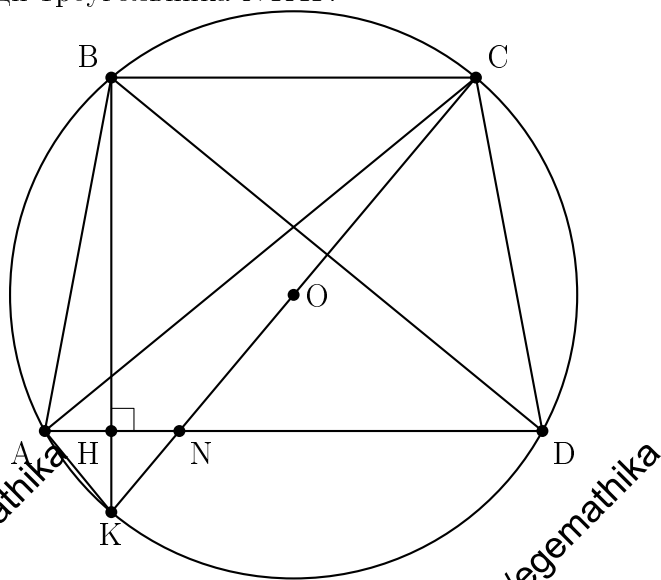
Задача 4. Основная волна 2021.

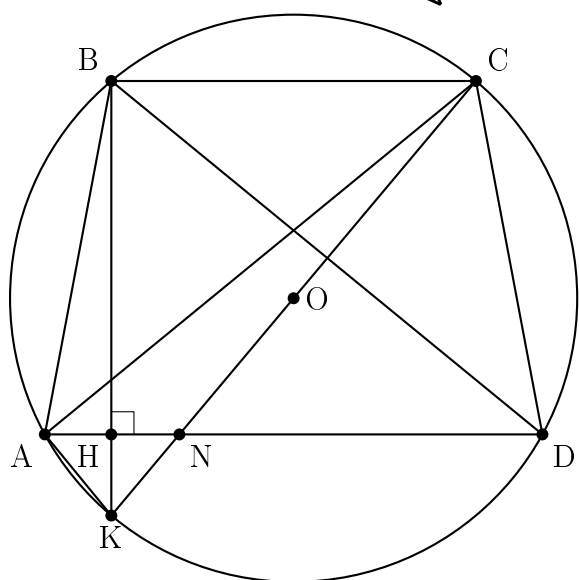
Теория: • метод координат • свойства углов, образованных при параллельных прямых и секущей • отношение площадей подобных треугольников • вписанный угол, опирающийся на диаметр

Около трапеции $ABCD$ с большим основанием AD описана окружность. BH — высота трапеции, вторично пересекающая описанную окружность в точке K .

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N . Найдите AD , если радиус описанной окружности равен 6, $\angle BAC = 30^\circ$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 35 раз больше площади треугольника NKH .





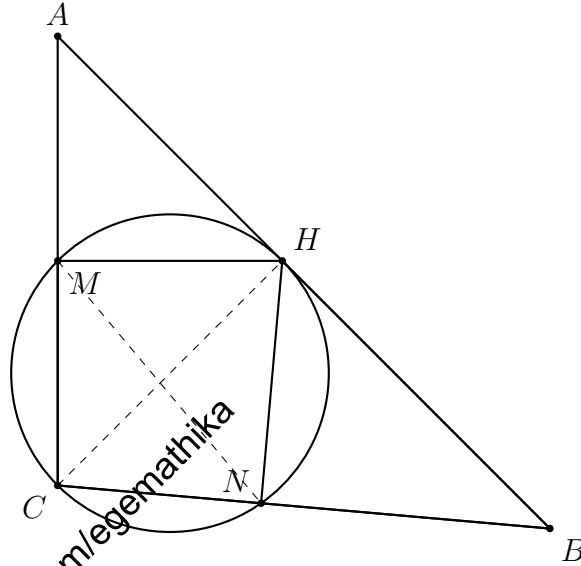
Задача 5. Основная волна 2021.

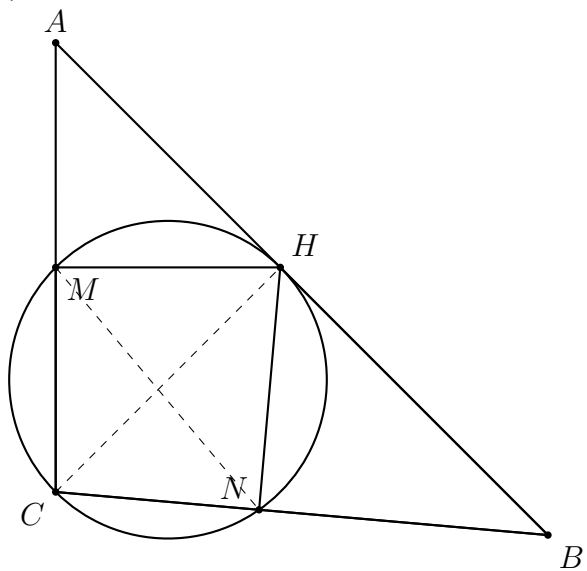
Теория: • метод координат • сумма углов треугольника • подобие треугольников по двум углам • критерий вписанного четырёхугольника (равенство вписанных углов) • критерий вписанного четырёхугольника (сумма противоположных углов)

Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C . На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MHN = 90^\circ$.

а) Докажите, что треугольник MNH подобен треугольнику ABC .

б) Найдите CN , если $BC = 2$, $AC = 4$, $CM = 1$.



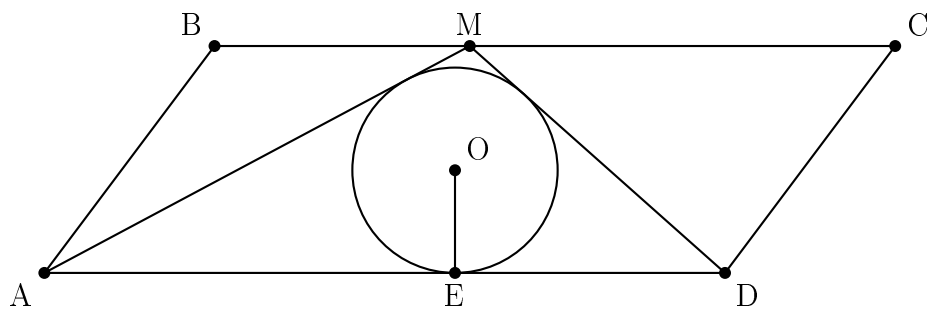


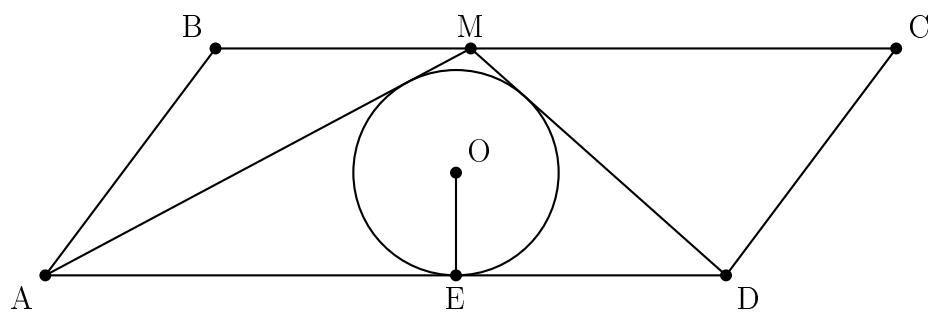
Задача 6. Основная волна 2022.

Теория: • сумма углов треугольника • свойства углов, образованных при параллельных прямых и секущей • признак равнобедренного треугольника • теорема синусов • критерий параллелограмма • теорема косинусов • теорема о пересечении биссектрис в треугольнике • площадь треугольника через стороны и угол между ними • площадь треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.

- а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .
- б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 7$, $BC = 21$, $\angle DAB = 60^\circ$.





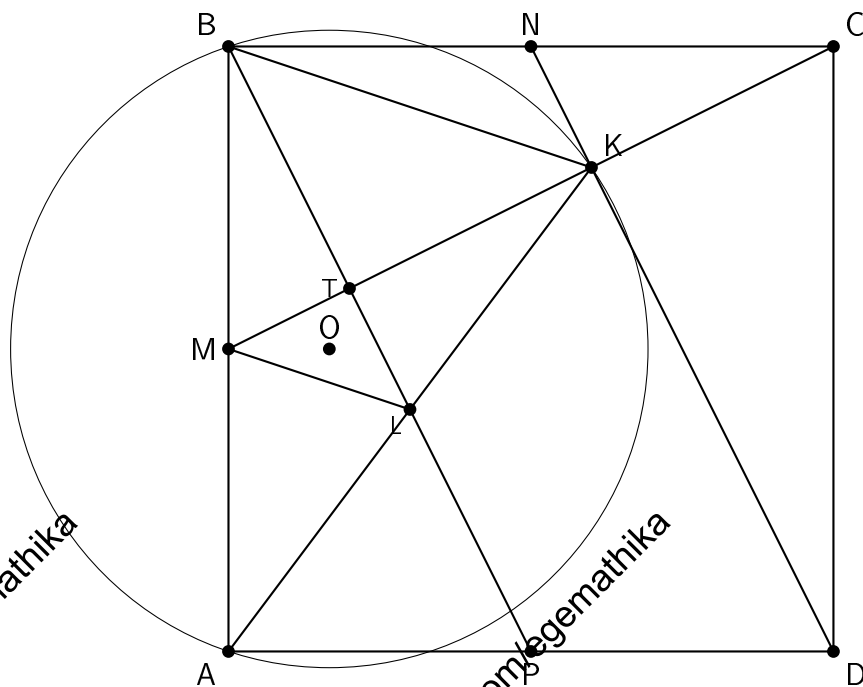
Задача 7. Основная волна 2022.

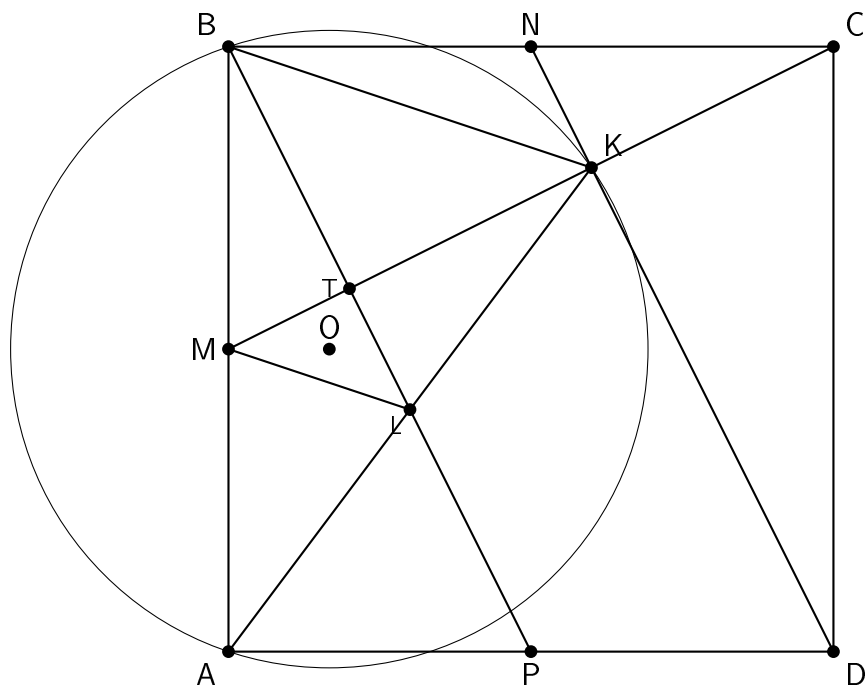
Теория: • метод координат

В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K .

а) Докажите, что $\angle BKM = 45^\circ$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK , если $AB = 4\sqrt{5}$.





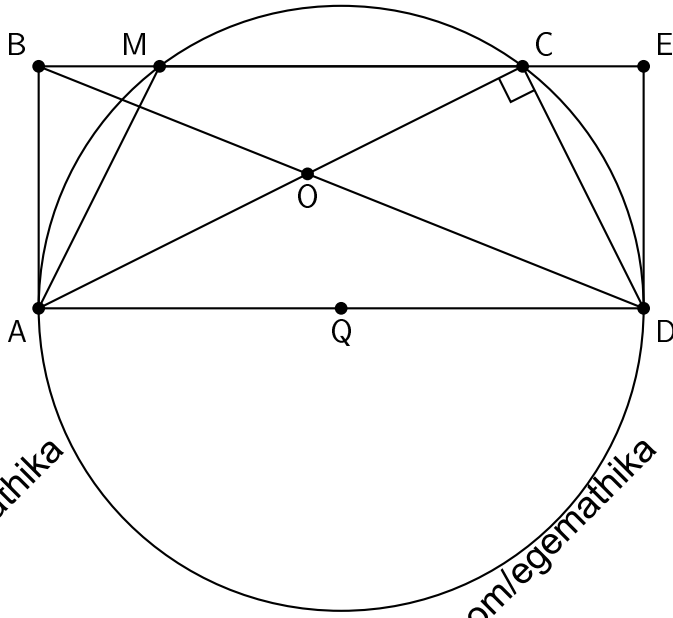
Задача 8. Основная волна 2025.

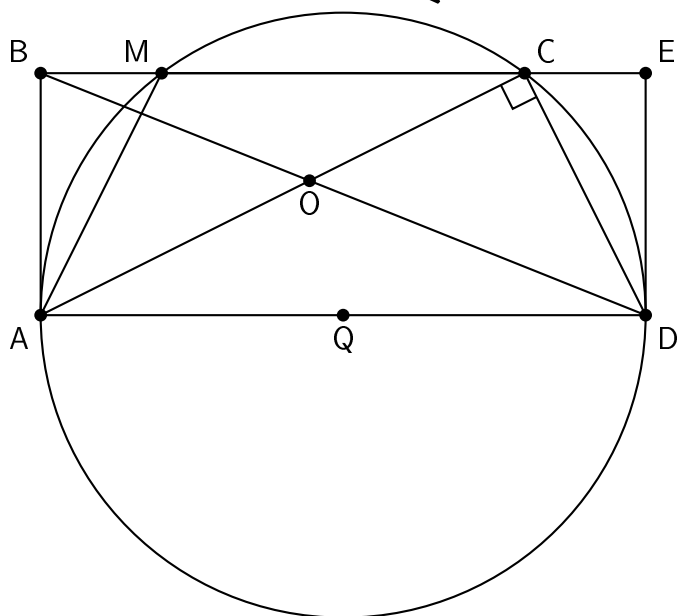
Теория: • метод координат • какую трапецию можно вписать в окружность • угол между касательной и хордой

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.

б) Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.





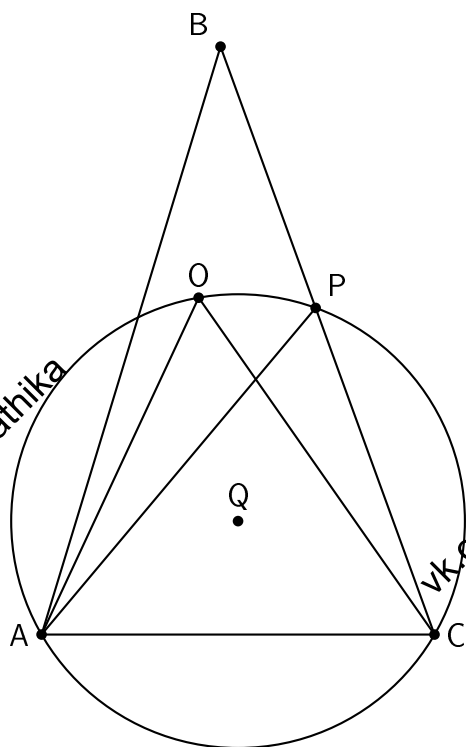
Задача 9. Основная волна 2025.

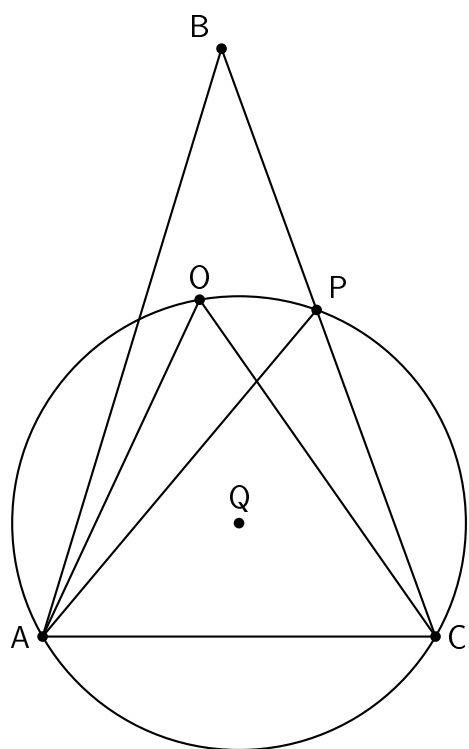
Теория: • сумма углов треугольника • подобие по двум углам • признак равнобедренного треугольника • теорема синусов • критерий вписанного четырёхугольника (равенство вписанных углов) • теорема косинусов • связь центрального и вписанного углов, опирающихся на одну дугу

Дан остроугольный треугольник ABC , причём $\angle BAC = 2\angle ABC$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AOC , пересекает сторону BC в точке P .

а) Докажите, что треугольники ABC и PAC подобны.

б) Найдите AB , если $BC = 6$ и $AC = 4$.





Задача 10. Основная волна 2025.

Теория: • свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей • признак и свойства равнобедренного треугольника • средняя линия в треугольнике • площадь треугольника через стороны и угол между ними • угол между касательной и хордой • метод координат

Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке M . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Окружность, описанная около треугольника ABM , касается прямых BC и OM .

а) Докажите, что $AB \perp BD$.

б) Отрезки AC и BM пересекаются в точке K . Найдите площадь четырёхугольника $KODM$, если $OM = 2$.

