

# Перестановки (без повторений).

- Пусть есть  $n$  различных элементов.  
Сколько способов их расставить?

*Пример.* Рассмотрим все случаи расстановки трёх разных шаров



*1 случай:*   

*2 случай:*   

*3 случай:*   

*4 случай:*   

*5 случай:*   

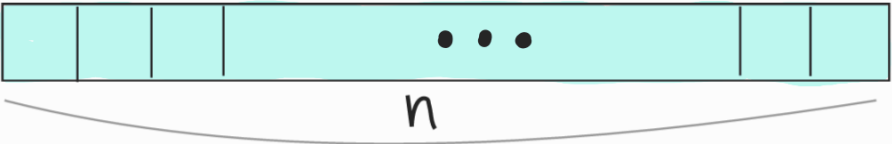
*6 случай:*   

Шесть способов расставить три различных элемента. Что, если количество элементов большое, и все способы выписать сложно?

# Перестановки (без повторений).

Поймём, как посчитать количество перестановок в общем случае для  $n$  элементов.

Элементы:  $\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \dots \quad \textcircled{n-1} \quad \textcircled{n}$

Места: 

Возьмём 1-ый элемент и выберем для него произвольное место,  $n$  способов его выбрать:



Останется  $n-1$  свободное место.

Возьмём 2-ой элемент и выберем для него произвольное место из свободных:



Останется  $n-2$  свободное место.

И так далее.

Для  $n$ -го элемента останется 1 свободное место.

## Перестановки (без повторений).

Получается, что количество способов расстановки  $n$  различных элементов равняется

$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ . То есть равняется  $n!$

□ **Формула перестановок без повторений:**

$$P_n = n!$$

*Задача.* Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 7, 5, 9, 1?

Переставляем четыре различных элемента,  $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ . Можете убедиться в этом, выписав все возможные числа.

*Задача.* Сколько способов рассадить 10 человек за стол на 10 мест?

$P_{10} = 10! = 3628800$  способов.

Хотели бы выписать все случаи вручную, перебором, не зная формулы перестановок?

## Перестановки (без повторений).

Иногда нужно немного подумать: "Точно ли все случаи перестановок удовлетворяют условию задачи?"

*Задача.* Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 7, 5, 0, 1?

Способов переставить четыре различных элемента  $4!=24$ , но с нуля число начинаться не может, поэтому эти перестановки не надо учитывать, сколько их?

Если первым будет стоять ноль, то переставить остальные три цифры  $3!=6$  способов. Значит, от 24 надо отнять 6. Итого, можно составить 18 чисел.

*Задача.* Сколько восьмизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы цифры 3 и 6 стояли рядом?

Можно считать за один элемент 3 и 6, тогда переставляем 7 элементов, и таких перестановок будет  $7!=5040$ . Но в каждой из таких перестановок можно поставить 3 и 6 рядом как 36, а можно как 63, т.е.  $2!=2$  способа ещё. Тогда  $2 \cdot 5040 = 10080$ .

# Перестановки (без повторений).

□ *Задачи для самостоятельного решения.*

1. Сколько способов раздать мётлы "Молния", "Нимбус", "Синяя муха", "Комета", "Веник", "Вихрь", "Дубрава" Невиллу, Гермионе, Рону, Гарри, Фреду, Джорджу и Драко, раздавая каждому по метле?
2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 таких, чтобы они не были кратны пяти?
3. В библиотеке Хогвартса на одной из полок стоят книги "Квиддич с древности до наших дней", "Сильнодействующие зелья", "История Хогвартса", "Расширенный курс зельеварения", "Сказки Барда Бидля", "Фантастические звери и места их обитания" и учебник по зельеварению Принца-полукровки. Сколько способов расставить книги на этой полке так, чтобы книги, связанные с зельями, стояли рядом?

## Перестановки (с повторениями).

- Пусть есть  $n$  элементов, среди которых есть повторяющиеся. Сколько способов их расставить?

*Пример.* Рассмотрим все случаи расстановки шаров:



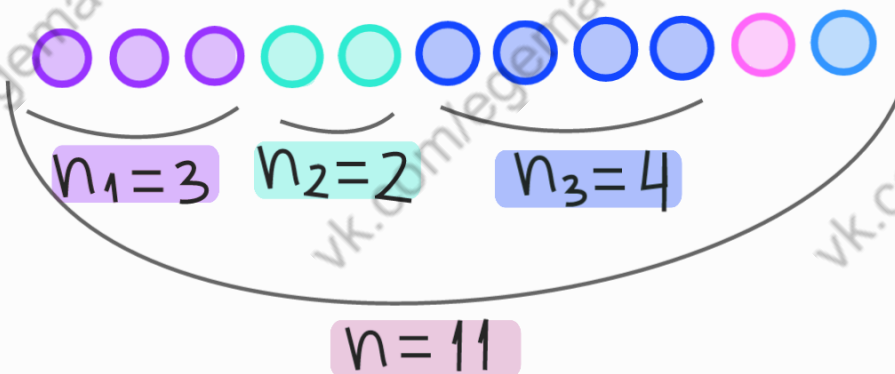
- |     |     |
|-----|-----|
| 1)  | 2)  |
| 3)  | 4)  |
| 5)  | 6)  |
| 7)  | 8)  |
| 9)  | 10) |
| 11) | 12) |

*В данном случае 4 элемента, среди которых одна группа одинаковых элементов (розовые), состоящая из двух элементов.*

## Перестановки (с повторениями).

Поймём, как посчитать количество перестановок в общем случае для  $n$  элементов, среди которых  $k$  групп, содержащих одинаковые элементы, в каждой из которых по  $n_1, n_2, \dots, n_k$  одинаковых элементов.

Пример:



Всего в множестве 11 элементов, значит, если бы они все были различными, то перестановок из них по предыдущей теме было бы  $11!$ . Но, поскольку, случаи, когда фиолетовые переставляются между собой, бирюзовые между собой, синие между собой не должны учитываться, то нужно  $11!$  поделить на  $3!, 2!, 4!$ . То есть  $\frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 15400$ .

# Перестановки (с повторениями).

Тогда в общем случае

□ **Формула перестановок с повторениями:**

$$P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

**Задача.** Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 7, 5, 5, 5, 9, 7?

Всего 6 элементов, из них три повторяющиеся "5" и две повторяющиеся "7", поэтому:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

**Задача.** В слове "ОГОРОД" переставляют буквы. Сколько способов это сделать так, чтобы три "О" не стояли рядом?

$$\frac{6!}{3!} - 4! = 96$$

(Всего 6 букв, "о" повторяется три раза. Если три "о" стоят рядом, то их можно принять за один элемент и будет перестановка из четырёх различных, т.е. 4!)

## Перестановки (с повторениями).

□ *Задачи для самостоятельного решения.*

1. У Гарри, Рона, Гермионы, Невилла, Полумны, Фреда и Джорджа есть 7 конфет Берти Ботс: 3 с корицей, 2 с вишней, 1 с арбузом и 1 с чёрным перцем. Сколько способов раздать по одной конфете каждому?

2. В слове "АЗКАБАН" переставляют буквы. Сколько способов это сделать так, чтобы три "А" не стояли рядом?

3. Гермиона помимо уроков в Хогвартсе дополнительно самостоятельно занимается учёбой. Четыре дня в неделю ходит в библиотеку, два дня практикуется в трансфигурации и один день отдыхает. Сколькими способами она может себе составить расписание для дополнительных занятий?

## Размещения (без повторений).

- Пусть есть  $n$  различных элементов. Сколько способов из них выбрать и расставить  $k$  различных элементов?

*Пример.* Рассмотрим все случаи расстановки двух шаров, выбирая из трёх разных шаров. ( $n=3$ ,  $k=2$ )



*1 случай:*



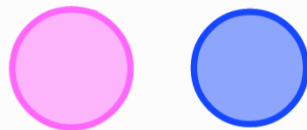
*2 случай:*



*3 случай:*



*4 случай:*



*5 случай:*



*6 случай:*



Шесть способов выбрать и по-разному расставить два элемента из трёх различных.

# Размещения (без повторений).

Какой будет формула размещений для  $k$  элементов из  $n$  в общем случае?

□ Как уже знаем из темы перестановок без повторений: существует  $n!$  способов расставить  $n$  различных элементов. Если же из  $n$  элементов выбираем и расставляем только  $k$ , то остальные  $n-k$  "ячеек" можно представить "пустыми":



"Пустые ячейки" можно считать одинаковыми элементами, порядок которых не важен. Тогда возникает перестановка из  $n$  элементов, из которых  $n-k$  одинаковых, т.е. перестановка с повторениями, формулу для которой уже знаем. Тогда:

□ **Формула размещений без повторений:**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□ Почему в случае размещения без повторений  $k < n$ ? Если было бы  $k > n$  возможно было бы обойтись без повторений? Если  $k = n$ , то это что?

## Размещения (без повторений).

**Задача.** Сколько способов составить двузначные числа, в записи которых не содержится одинаковых цифр, используя цифры 6, 3, 8, 2, 9?

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20 \text{ способов.}$$

**Задача.** Сколько способов составить трёхзначные числа, в записи которых не содержится одинаковых цифр, используя цифры 6, 3, 8, 2, 0?

Поскольку с нуля число начинаться не может, то:

$$A_5^3 - A_4^2 = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = 48.$$

**Задача.** В поезде есть два четырёхместных кресла друг напротив друга, на которые усаживаются 8 пассажиров. Три пассажира хотят сидеть по ходу движения поезда, а два против. Остальным безразлично. Сколько способов их рассадить, учитывая их пожелания?

$$A_4^3 \cdot A_4^2 \cdot P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} \cdot \frac{4!}{(4-2)!} \cdot 3! = 1728.$$

## Размещения (без повторений).

□ *Задачи для самостоятельного решения.*

1. В команду для квиддича требуется один вратарь и один ловец. Попробовать себя на эти должности пришли Рон, Гарри, Фред и Джордж. Сколькими способами возможно выбрать вратаря и ловца?

2. Полумна хочет угостить Гарри, Рона и Гермиону конфетами, дав каждому по одной. У неё есть пять конфет: с яблоком, с корицей, с вишней, с мятой, с дыней. Сколькими способами возможно это сделать, если Гермиона не приемлет вкус мяты?

3. В купе Хогвартс-экспресс два трёхместных дивана друг напротив друга. В одно купе зашли Гарри, Рон, Гермиона, Невилл, Полумна и Фред. Сколькими способами они могут сесть, если Гермиона и Полумна хотят ехать по ходу движения поезда, Невилл против хода движения поезда, а остальным безразлично?

## Сочетания (без повторений).

- Пусть есть  $n$  различных элементов. Сколько способов выбрать из них  $k$  различных элементов (порядок элементов не важен)?

*Пример.* Рассмотрим все случаи выбора двух шаров, выбирая из четырёх разных шаров. ( $n=4, k=2$ )



Поскольку порядок не важен, то, например,



и



*1 случай:*



*2 случай:*



*3 случай:*



*4 случай:*



*5 случай:*



*6 случай:*



## Сочетания (без повторений).

Какой будет формула сочетаний для  $k$  элементов из  $n$  в общем случае?

- Как уже знаем из темы размещений без повторений:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Чем отличается выбор  $k$  элементов из  $n$  различных, когда порядок не важен (сочетания) от того, когда порядок важен (размещения)?

Только тем, что разная расстановка  $k$  элементов будет считаться одним и тем же случаем, т.е. эти случаи нужно убрать из рассмотрения. Зная формулу перестановок без повторений, понимаем, что для каждой такой выборки в  $k$  элементов будет  $k!$  способов её расстановки, поэтому:

- **Формула сочетаний без повторений:**

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

## Сочетания (без повторений).

**Задача.** В классе 15 человек. Для дежурства нужно выбрать 5 из них. Сколько способов это сделать?

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} = 3003.$$

**Задача.** Из 10 роз и 8 пионов нужно составить букет так, чтобы в нём было 2 розы и 3 пиона. Сколькими способами это можно сделать?

$$C_{10}^2 \cdot C_8^3 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 2520.$$

**Задача.** Сколько диагоналей у выпуклого десятиугольника?

Диагональю является отрезок, соединяющий любую вершину многоугольника с любой другой несмежной вершиной. Если вершина соединяется со смежной вершиной, то полученный отрезок будет стороной многоугольника, у десятиугольника их 10. Всего же способов выбрать две вершины  $C_{10}^2$ . Тогда:

$$C_{10}^2 - 10 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} - 10 = 35.$$

**Задача.** Сколько способов выбрать четыре пары для танца из 12 девушек и 15 юношей?

$$C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = \frac{12!}{8! \cdot 4!} \cdot \frac{15!}{11!} = 16216200.$$

(Выбираем 4 девушек и каждой из них сопоставляем 4 юноши)

## Сочетания (без повторений).

□ *Задачи для самостоятельного решения.*

1. Гарри Поттеру предложили дружбу Рон Уизли, Чжоу Чанг, Драко Малфой и Гермиона Грейнджер. Сколько способов у Гарри выбрать себе двоих друзей?

2. В магазине мадам Малкин имеется пять мантий, нужного размера для Гарри, и семь шляп. Сколькими способами Гарри может выбрать себе три мантии и две шляпы?

3. Сколько диагоналей у выпуклого 13-угольника?

4. Святочный Бал открывают три пары из юноши и девушки. Желают это сделать 7 юношей и 5 девушек. Сколько способов выбрать из них три пары?

## Размещения (с повторениями).

- Пусть есть  $n$  различных элементов. Сколько способов из них выбрать и расставить  $k$  элементов, если при выборке элементы могут повторяться?

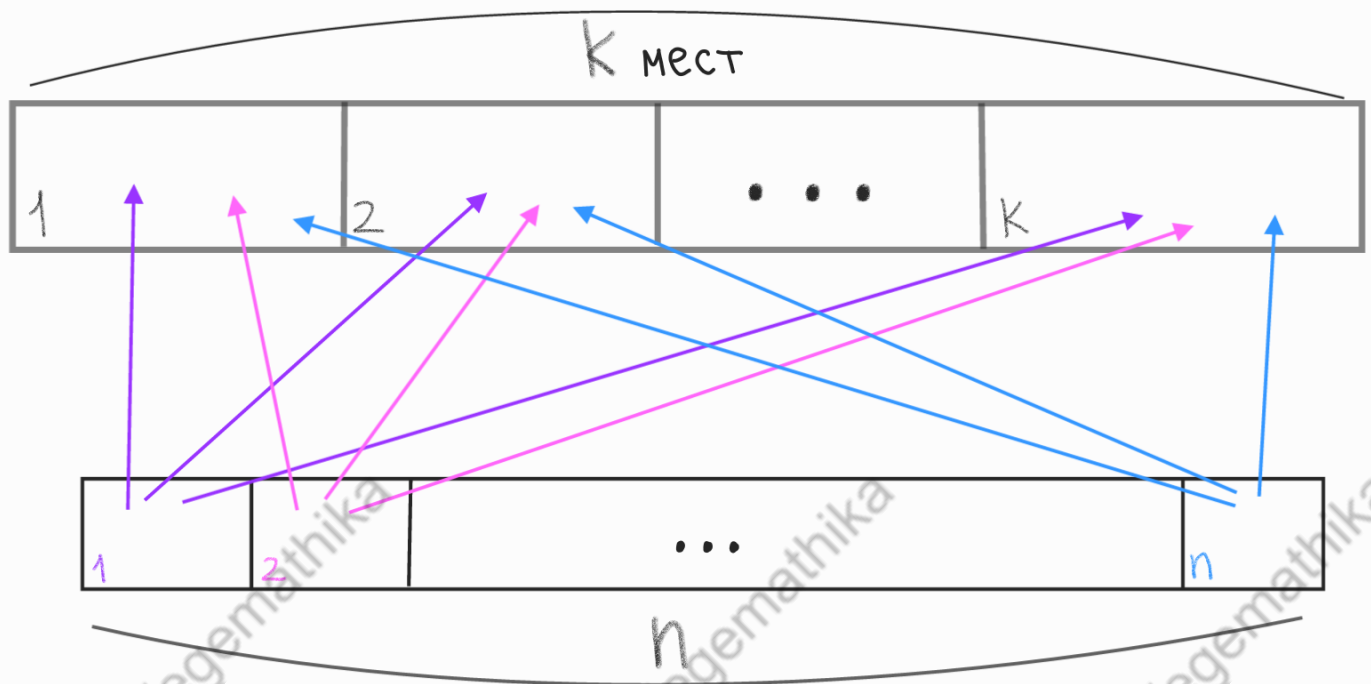
*Пример.* Рассмотрим все случаи расстановки трёх шаров, выбирая из двух разных шаров. ( $n=2, k=3$ )

|           |                                                                                                                                                                                                                                                             |           |                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 случай: |    | 5 случай: |    |
| 2 случай: |    | 6 случай: |    |
| 3 случай: |    | 7 случай: |    |
| 4 случай: |    | 8 случай: |    |

То есть разным случаям соответствует разный порядок одних и тех же элементов и каждый элемент можно брать несколько раз.

# Размещения (с повторениями).

Какой будет формула размещений для  $k$  элементов из  $n$  различных в общем случае?



На каждое из  $k$  мест можем выбирать любой из  $n$  элементов.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k$$

□ Формула размещений с повторениями:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

$k$  может быть как больше, меньше, так и равно  $n$ , это не важно.

## Размещения (с повторениями).

**Задача.** Сколько способов придумать четырёхзначный код для сейфа?

Всего 10 цифр: 0, 1, ..., 9. На четыре места можем выбирать любую из цифр, поэтому:

$$\bar{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

**Задача.** Посчитать количество вариантов автомобильного номера для одного региона, если он имеет вид

$A000AA$ , где  $A$  может быть любой из 12 букв: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х.

А на месте 0 может быть любая цифра, за исключением того, что номер не может состоять из трёх нулей.

$$\bar{A}_{12}^3 \cdot (\bar{A}_{10}^3 - 1) = 12^3 \cdot (10^3 - 1) = 1726272.$$

**Задача.** Сколько натуральных чисел в десятичной системе счисления можно зашифровать, используя в двоичной системе счисления (используются только "0" и "1"), ровно 5 знаков? (От 10000 до 11111.)

С нуля начинаться число не может, поэтому:

$$\bar{A}_2^5 - \bar{A}_2^4 = 2^5 - 2^4 = 16.$$

## Размещения (с повторениями).

□ *Задачи для самостоятельного решения.*

1. Монету подбрасывают 5 раз. Сколько возможно разных вариантов развития событий?

2. Пользователю нужно придумать пароль вида  $00000AAA$ , где  $0$  является любой цифрой, а  $A$  является любой латинской буквой. Нельзя использовать пароль, где используется только одна цифра или одна буква. Сколько способов придумать пароль?

3. Сколько натуральных чисел в десятичной системе счисления можно зашифровать, используя в двоичной системе счисления (используются только "0" и "1"), ровно 6 знаков? (От 100000 до 111111.)

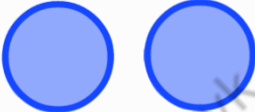
## Сочетания (с повторениями).

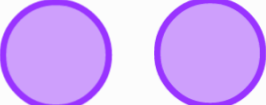
- Пусть есть  $n$  различных элементов. Сколько способов выбрать из них  $k$  элементов, если каждый из  $n$  элементов можно брать с повторами (порядок элементов не важен)?

*Пример.* Рассмотрим все случаи выбора, возможно, с повторами, двух шаров, выбирая из трёх различных. ( $n=3, k=2$ )



*Порядок выбранных шаров не важен!*

1 случай: 

2 случай: 

3 случай: 

4 случай: 

5 случай: 

6 случай: 

# Сочетания (с повторениями).

Какой будет формула сочетаний с повторениями для  $k$  элементов из  $n$  в общем случае?

□ Как уже знаем из темы сочетаний без повторений:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{Докажем, что} \quad \bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$



Есть  $n$  "сортов" к каждому из которых относится или не относится какой-то элемент из  $k$ .

Для того, чтобы разбить элементы на  $n$  "сортов" необходимо использовать  $n-1$  перегородку. (Проверьте это на маленьком количестве.) Если ни один элемент из  $k$  не берётся из какого-либо "сорта" из  $n$ , то перегородки стоят рядом, как на примере выше для  $n-1$  "сорта".

Задача сводится к тому, сколько способов расставить  $n-1$  перегородку среди  $k$  элементов.



Сколько способов выбрать  $k$  мест из  $n+k-1$  для  $k$  элементов? (Остальные места автоматически займут перегородки.)

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

# Сочетания (с повторениями).

- **Формула сочетаний с повторениями:**

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

$k$  может быть как больше, меньше, так и равно  $n$ , это не важно.

**Задача.** В магазине продаётся 5 видов мороженого (каждого достаточно много). Сколько способов купить шесть мороженных?

$$\bar{C}_5^6 = \frac{(5+6-1)!}{6! \cdot (5-1)!} = 210.$$

**Задача.** В магазине продаётся 3 вида мороженого (каждого достаточно много). Сколько способов купить два мороженных?

$$\bar{C}_3^2 = \frac{(3+2-1)!}{2! \cdot (3-1)!} = 6.$$

**Задача.** В магазине продаётся 3 вида мороженого (каждого достаточно много). Сколько способов купить три мороженных?

$$\bar{C}_3^3 = \frac{(3+3-1)!}{3! \cdot (3-1)!} = 10.$$

## Сочетания (с повторениями).

- *Задачи для самостоятельного решения.*

В магазине "Всевозможные волшебные вредилки" продаётся четыре вида любовного зелья (каждого достаточно много). Сколько способов у Ромильды купить

а) две колбочки с зельем?

б) четыре?

в) шесть?