

15.1 Угол между прямыми.

1.1

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказать, что $AC \perp BD_1$.

1.2

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказать, что $\angle(AD_1; A_1 B) = 60^\circ$.

2.1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно. Доказать, что $B_1 N \perp CM$.

2.2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$ соответственно. Доказать, что $BN \perp C_1 M$.

3.1

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны. Точка M является серединой ребра AA_1 . Доказать, что $MB \perp B_1 C$.

3.2

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 4. Точка M является серединой ребра BC . На ребре BB_1 отмечена точка N так, что $B_1 N = 1$. Доказать, что $AN \perp A_1 M$.

4.1

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами рёбер AB и CD соответственно. Доказать, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .

4.2

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами рёбер AD и BC соответственно. Доказать, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AD и BC .

5.1

Дана $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$. Доказать, что $SA \perp BC$.

5.2

Дана $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{19}$, $SA = BC = 2\sqrt{6}$. Доказать, что $SA \perp BC$.

6.1

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$. Доказать, что $A_1 C \perp BD$.

6.2

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$. Точки M и N являются серединами рёбер AB и $A_1 D_1$ соответственно. Доказать, что $AC \perp MN$.

7.1

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 является серединой отрезка AD . На прямой $B_1 C_1$ отмечена точка E так, что точка C_1 является серединой отрезка $B_1 E$. Доказать, что $A_1 B_1 \perp DE$.

7.2

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 является серединой отрезка AD . Известно, что $AB = 2AA_1$. Доказать, что $AB_1 \perp CD$.

8.1

Дан правильный треугольник ABC . Точка D лежит вне плоскости ABC , $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0,3$. Доказать, что $AD \perp BC$.

8.2

Вне плоскости правильного треугольника ABC расположена точка D , причём $\cos \angle DAC = \cos \angle DAB = 0,2$. Доказать, что $AD \perp BC$.

9.1

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания выбрана точка C_1 , причём CC_1 является образующей цилиндра, а AC является диаметром основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$. Доказать, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .

9.2

В цилиндре на окружности нижнего основания выбраны точки A , B и C так, что $AC = BC$, AB является диаметром основания. Точка O_1 является центром верхнего основания цилиндра, на окружности этого основания выбрана точка C_1 так, что CC_1 является образующей цилиндра, перпендикулярной основаниям. Известно, что $\cos \angle AC_1B = 0,6$. Доказать, что треугольник AO_1B равносторонний.

10.1

Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M является серединой образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причём MN параллельна образующей конуса SB . Доказать, что $\angle ANO = 90^\circ$.

10.2

Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 13, а его высота равна $3\sqrt{41}$. На окружности основания конуса отмечены точки A и B . Точка M является серединой отрезка SA , а на отрезке AB отмечена точка N так, что $\angle ANO = 90^\circ$. Доказать, что $MN \parallel SB$.

11.1

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 12$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{14}$, $SB = 9$, $SD = 10\sqrt{2}$. Найти угол между прямыми SC и BD .

11.2

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 24$ и $BC = 7$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{51}$, $SB = \sqrt{627}$, $SD = 10$. Найти угол между прямыми SC и BD .

15.2 Угол между прямой и плоскостью.

1.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O является центром основания пирамиды, а точка M является серединой ребра SC . Точка K делит ребро BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B . Сторона основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды $3\sqrt{7}$. Доказать, что плоскость $OMK \parallel SA$.

1.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O является центром основания пирамиды, а точка M является серединой ребра SC . Точка K делит ребро BC в отношении $3 : 2$, считая от вершины B . Сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды $2\sqrt{23}$. Доказать, что плоскость $OMK \parallel SA$.

2.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 7$, $SA = 14$. На рёбрах CD и SC взяты точки N и K соответственно так, что $DN : NC = SK : KC = 2 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру SA . Доказать, что плоскость $\alpha \parallel BC$.

2.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 6$, $SA = 7$. На рёбрах CD и SC взяты точки N и K соответственно так, что $DN : NC = SK : KC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру SA . Доказать, что плоскость $\alpha \parallel BC$.

3.1

Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 4$, точка K является серединой ребра DD_1 . Доказать, что плоскость $MCK \parallel BD$.

3.2

Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 2 : 3$, точка K является серединой ребра DD_1 . Доказать, что плоскость $MCK \parallel BD$.

4.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$. Доказать, что плоскость $PQR \perp SD$.

4.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 10. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 4$. Доказать, что плоскость $PQR \perp SD$.

5.1

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$, $BC = 2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$. Доказать, что SA является высотой пирамиды.

5.2

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 6$. Серединой ребра AD является точка M . Известно, что $SA = SD = 4$, $SB = 5$. Доказать, что SM является высотой пирамиды.

6.1

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 12$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{14}$, $SB = 9$, $SD = 10\sqrt{2}$. Доказать, что SA является высотой пирамиды.

6.2

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 24$, $BC = 7$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{51}$, $SB = \sqrt{627}$, $SD = 10$. Доказать, что SA является высотой пирамиды.

7.1

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 10 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB , AD и CD отмечены точки K , L и M соответственно, причём $BK = 2$, $AL = 4$, $MD = 3$. Доказать, что плоскость $KLM \perp CD$.

7.2

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 3 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB , AD и CD отмечены точки K , L и M соответственно, причём $BK = AL = MD = 1$. Доказать, что плоскость $KLM \perp CD$.

8.1

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$, $BC = 2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$. Найти угол между прямой SC и плоскостью ASB .

8.2

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 6$. Серединой ребра AD является точка M . Известно, что $SA = SD = 4$, $SB = 5$. Найти угол между прямой BM и плоскостью CSD .

9.1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. Точка M является серединой ребра A_1C_1 , а точка O является точкой пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 . Найти угол между прямой OC_1 и плоскостью ABM .

9.2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Точки M и N являются соответственно серединами рёбер A_1B_1 и B_1C_1 . Найти угол между прямой CM и плоскостью ABN .

15.3 Угол между плоскостями.

1.1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 12$, а высота равна 1. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = AN = 3$ и $AK = \frac{7}{4}$. Доказать, что плоскость $MNK \parallel SBC$.

1.2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 6$, а высота равна 2. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = AN = 2$ и $AK = \frac{4}{3}$. Доказать, что плоскость $MNK \parallel SBC$.

2.1

В основании пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ и плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, а $AB \cap CD = K$. Доказать, что плоскость $PAB \perp PCD$.

2.2

В основании пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, $AB \cap CD = K$. Также известно, что $AD = 2KM$ и точка M является серединой AD . Доказать, что плоскость $PAB \perp PCD$.

3.1

На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка Q , причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P является серединой ребра AS . Доказать, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

3.2

На ребре AS правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка Q , причём $AQ : QS = 2 : 1$. Точка P является серединой ребра AB . Доказать, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

4.1

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 4. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $BK = 3$. Плоскость α проходит через точки C_1 и K параллельно BD_1 и пересекает ребро $A_1 B_1$ в точке P . Найти угол наклона плоскости α к плоскости $BB_1 C$.

4.2

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. На ребре BB_1 отмечена точка K так, что $BK = 4$. Точка M является серединой ребра $A_1 B_1$. Найти угол наклона плоскости $C_1 KM$ к плоскости $CC_1 D$.

5.1

Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB . Найти угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 9$.

5.2

Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 10$, $BC = 5\sqrt{2}$. Боковое ребро $SA = 10$ перпендикулярно основанию. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BP и DQ на ребро SC . Найти угол между плоскостями SBC и SDC .

6.1

В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S точки M и N являются серединами рёбер AB и BC соответственно. На ребре SA отмечена точка K . Сечение пирамиды плоскостью MNK является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке Q . Найти угол между плоскостями MNK и ABC , если $AB = 6$, $SA = 12$, $SK = 6$.

6.2

В правильном тетраэдре $SABC$ ребро равно 20. На рёбрах AB , AS и CS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = AN = 5$, $BK = 8$. Найти угол между плоскостями MNK и BCS .

7.1

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB . Найти угол между плоскостями SAC и ABC , если $AC = 24$, $AB = 30$, $SA = 17$.

7.2

В треугольной пирамиде $SABC$ проведена высота SO . Точка O лежит на ребре AB так, что $AO = 2$. В основании пирамиды треугольник со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{28}$. Найти угол между плоскостями SBC и ABC , если $SA = 2\sqrt{10}$.

8.1

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб. Найти угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

8.2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M является серединой ребра CC_1 . Сечением этого параллелепипеда плоскостью α , содержащей прямую AM и параллельной прямой BD , является ромб. Найти угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 4$, $AB = 3$.

9.1

Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$, а точка K является серединой ребра DD_1 . Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle BAD = 60^\circ$ и $\angle CKM = 90^\circ$.

9.2

Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 2 : 3$, а точка K является серединой ребра DD_1 . Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle ADC = 60^\circ$ и $\angle CKM = 90^\circ$.

15.4 Расстояние от точки до плоскости.

1.1

На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M . Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

1.2

На рёбрах CD и $A_1 D_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 3$, $D_1 Q = 3$. Плоскость BPQ пересекает ребро DD_1 в точке M . Найдите расстояние от точки A до плоскости BPQ .

2.1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно. Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 3\sqrt{5}$.

2.2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно. Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

3.1

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 7. На ребре CC_1 отмечена точка M , причём $CM = 1$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM .

3.2

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 6. Точка M является серединой бокового ребра BB_1 . Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости AMC_1 .

4.1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а высота равна 1. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N , и K соответственно, причём $AM = AN = 3$ и $AK = 1,75$. Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

4.2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а высота равна 2. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N , и K соответственно, причём $AM = AN = 2$ и $AK = \frac{4}{3}$. Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

5.1

Точка M является серединой ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой C_1M . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины A . Известно, что $AC = 10$, $AA_1 = 12$.

5.2

Точка M является серединой ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой C_1M . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 5$, считая от вершины A . Известно, что $AC = 20$, $AA_1 = 32$.

6.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

6.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно 3, а боковое ребро равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $PA = QC = 1$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости PQS .

7.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S $AB = 7$, $SA = 14$. На рёбрах CD и SC взяты точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 2 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру SA . Найдите расстояние от точки B до плоскости α .

7.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S $AB = 2\sqrt{2}$, $SA = 4$. На ребре SB взята точка K так, что $SK : KB = 1 : 3$. Точки M и N являются серединами рёбер CD и SC соответственно. Найдите расстояние от точки B до плоскости MNK .

8.1

Дан тетраэдр $ABCD$, на рёбрах AC , AD , BD , BC отмечены точки K , L , M , N соответственно так, что $AK : KC = 3 : 7$, а $KLMN$ является квадратом со стороной, равной 3. Найдите расстояние от точки C до плоскости KLM , если известно, что объём тетраэдра равен 50.

8.2

Дан тетраэдр $ABCD$, на рёбрах AC , AD , BD , BC отмечены точки K , L , M , N соответственно так, что $AK : KC = 2 : 3$, а $KLMN$ является квадратом со стороной, равной 2. Найдите расстояние от точки C до плоскости KLM , если известно, что объём тетраэдра равен 25.

15.5 Расстояние между прямыми.

1.1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6. Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1 .

1.2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 2. Найдите расстояние между прямыми AD_1 и $A_1 B$.

2.1

Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$. Найдите расстояние между рёбрами BC и SA .

2.2

Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{19}$, $SA = BC = 2\sqrt{6}$. Найдите расстояние между рёбрами BC и SA .

3.1

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 2. Точка M является серединой ребра AA_1 . Найдите расстояние между прямыми MB и $B_1 C$.

3.2

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 4. Точка M является серединой ребра BC . На ребре BB_1 отмечена точка N так, что $B_1 N = 1$. Найдите расстояние между прямыми AN и $A_1 M$.

4.1

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 является серединой отрезка AD . На прямой $B_1 C_1$ отмечена точка E так, что точка C_1 является серединой отрезка $B_1 E$. Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 3$, $AA_1 = 1$.

4.2

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 является серединой отрезка AD . Известно, что $AB = 2AA_1$, $AA_1 = 1$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD .

5.1

Дан правильный треугольник ABC . Точка D лежит вне плоскости ABC , $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0.3$. Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если $AC = 6$.

5.2

Дан правильный треугольник ABC . Точка D лежит вне плоскости ABC , $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0.2$. Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если $AB = 2$.

6.1

В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B , а на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра. Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BB_1 , если $AB = 8$, $B_1 C_1 = 15$.

6.2

В цилиндре точки O и O_1 являются центрами нижнего и верхнего оснований цилиндра соответственно. На окружности нижнего основания отмечены точки A и B , а на окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей, перпендикулярной основаниям и $AB \perp B_1 C_1$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 , если $AB = 3$, $B_1 C_1 = 4$, $BB_1 = 1$.

15.6 Пересечение прямой и плоскости. Деление отрезка в заданном соотношении.

1.1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 . Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 1 : 2$, где P является точкой пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

1.2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 12. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 . Докажите, что $A_1 P : PD_1 = 2 : 1$, где P является точкой пересечения плоскости α с ребром $A_1 D_1$.

2.1

На ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причём $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M . Докажите, что точка M является серединой ребра DD_1 .

2.2

На боковых рёбрах AA_1 и CC_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки K и N соответственно, причём $AK : KA_1 = C_1 N : NC = 2 : 3$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BD . Плоскость α пересекает ребро BB_1 в точке M . Докажите, что точка M является серединой ребра BB_1 .

3.1

Дан тетраэдр $ABCD$, на рёбрах AC , AD , BD , BC отмечены точки K , L , M , N соответственно так, что $AK : KC = 3 : 7$, а $KLMN$ является квадратом со стороной, равной 3. Докажите, что $BM : MD = 3 : 7$.

3.2

Дан тетраэдр $ABCD$, на рёбрах AC , AD , BD , BC отмечены точки K , L , M , N соответственно так, что $AK : KC = 2 : 3$, а $KLMN$ является квадратом со стороной, равной 2. Докажите, что $BM : MD = 2 : 3$.

4.1

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость α проходит через вершины B_1 и D , пересекает стороны AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Сечение призмы плоскостью α является ромбом. Докажите, что точка M является серединой ребра AA_1 .

4.2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость α проходит через вершины B_1 и A , пересекает стороны BB_1 и DD_1 в точках M и K соответственно. Сечение призмы плоскостью α является ромбом. Докажите, что точка M является серединой ребра BB_1 .

5.1

Дана правильная пирамида $SABC$ с основанием ABC , точки K и M являются серединами рёбер AB и SC соответственно. Точки N и L на сторонах BC и SA соответственно расположены таким образом, что $LA = 4SL$ и прямые NL и MK пересекаются. Найдите отношение $CN : NB$.

5.2

Дана правильная пирамида $SABC$ с основанием ABC , точки M и K являются серединами рёбер AB и SC соответственно. Точки L и N на сторонах BC и SA соответственно расположены таким образом, что $AN = 3NS$ и прямые NL и MK пересекаются. Найдите отношение $BL : LC$.

15.7 Плоскости. Сечения.

1.1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 4, точка M является серединой ребра DD_1 . Плоскость α параллельна прямой AC и проходит через точки B и M . Постройте сечение куба плоскостью α .

1.2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным $\sqrt{17}$, точки M и N являются серединами рёбер $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ соответственно. Постройте сечение куба плоскостью AMN .

2.1

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 3 : 1$. Точки P и Q являются серединами рёбер DA и DC соответственно. Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

2.2

На рёбрах AD и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно, причём $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$. Точки M и N являются серединами рёбер AB и DC соответственно. Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

3.1

В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На боковых рёбрах SA, SC и SD отмечены точки K, L, M соответственно так, что $SK : KA = SL : LC = 2 : 1$ и $SM = MD$. Докажите, что плоскость KML содержит точку B .

3.2

В основании пирамиды $PABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На боковых рёбрах PD, PC и PA отмечены точки M, L, K соответственно так, что $AK : PK = LC : LP = 1 : 2$ и $DM = MP$. Докажите, что точка B принадлежит плоскости LMK .

4.1

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной, равной $\sqrt{18}$. Высота призмы равна $\sqrt{28}$. Точка K является серединой ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 . Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

4.2

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной, равной 2. Высота призмы равна 4. Точки M и K являются серединами рёбер DD_1 и $B_1 C_1$ соответственно. Через точку K проведена плоскость α , параллельная плоскости AMC . Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равносторонним треугольником.

5.1

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N являются серединами боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через прямую MN параллельно прямой SO . Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является трапецией.

5.2

В основании пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке E . Точки N и M являются серединами боковых сторон CD и BA соответственно. Плоскость β проходит через точки M и N параллельно прямой EP . Докажите, что сечение пирамиды плоскостью β является трапецией.

6.1

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$, $C_1 D_1$ отмечены точки M , N , K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

6.2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{6}$. На рёбрах DD_1 , BC , $A_1 B_1$ отмечены точки M , N , K соответственно, причём $DM = \sqrt{6}$, $BK = B_1 N = 2$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

7.1

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α , если известно, что $BK = 1$ и $KC = 3$.

7.2

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α , если известно, что $BK = 1$ и $KC = 5$.

8.1

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, точка K является серединой ребра DD_1 . Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

8.2

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 2 : 3$, точка K является серединой ребра DD_1 . Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

15.8 Объёмы.

1.1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 . Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

1.2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 12. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 . Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

2.1

В основании пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ и плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, а $AB \cap CD = K$. Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 8.

2.2

В основании пирамиды $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, $AB \cap CD = K$. Также известно, что $AD = 2KM$ и точка M является серединой AD . Найдите объём пирамиды $PAKM$, если высота пирамиды $PABCD$ равна 1, $BC = 2$, $AB = 3$, $CD = 4$.

3.1

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 3 : 1$. Точки P и Q являются серединами рёбер DA и DC соответственно. Найдите, в каком отношении плоскость MNQ делит объём пирамиды.

3.2

На рёбрах AD и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно, причём $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$. Точки M и N являются серединами рёбер AB и DC соответственно. Найдите, в каком отношении плоскость MNQ делит объём пирамиды.

4.1

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны. Найдите объём пирамиды $PABC$.

4.2

В треугольной пирамиде $PABC$ известно, что $AC = AP = BP = CP = 8$, $\cos \angle APB = \frac{7}{32}$. Основанием высоты этой пирамиды, опущенной из вершины P , является середина ребра AB . Найдите объём пирамиды $PABC$.

5.1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и N являются серединами рёбер AB и SC соответственно. Известно, что $SA = 8$, $MN = 5$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5.2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка O является центром основания ABC . Точки M , N , P являются серединами отрезков BC , SA , SO соответственно. Известно, что $SA = 10$, $MN = \sqrt{73}$. Найдите объём пирамиды $SABP$.

6.1

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O является серединой отрезка CB_1 . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{6}$.

6.2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O является серединой отрезка CB_1 . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

7.1

В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На боковых рёбрах SA , SC и SD отмечены точки K , L , M соответственно так, что $SK : KA = SL : LC = 2 : 1$ и $SM = MD$. Найдите объём пирамиды $BAKMD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 18, а высота пирамиды $SABCD$ равна 7.

7.2

В основании пирамиды $PABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На боковых рёбрах PD , PC и PA отмечены точки M , L , K соответственно так, что $AK : PK = LC : LP = 1 : 2$ и $DM = MP$. Найдите объём пирамиды $BAKMD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 21, а высота пирамиды $PABCD$ равна 12.

15.9 Разное.

1.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 15$, высота $SH = 8$. Точка K является серединой ребра SD . Плоскость AKB пересекает ребро SC в точке P . Докажите, что площадь $CDKP$ составляет 0.75 площади SCD .

1.2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$. Точка K является серединой ребра SA . Плоскость, проходящая через точку K параллельно основанию пирамиды, пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно. Докажите, что площадь $PQBC$ составляет 0.75 площади BSC .

2.1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8$, а боковое ребро $AA_1 = 7$. На ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM = 1$. Точки O и O_1 являются соответственно центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .

2.2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. Точка M является серединой бокового ребра BB_1 . Точки O и O_1 являются центрами окружностей, описанных соответственно около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника AMC_1 .

3.1

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб. Докажите, что $ABCD$ является квадратом.

3.2

Точка M является серединой ребра CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сечением этого параллелепипеда плоскостью α , содержащей прямую AM и параллельной прямой BD , является ромб. Докажите, что $ABCD$ является квадратом.

4.1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. Точка M является серединой ребра A_1C_1 , а точка O является точкой пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 . Докажите, что точка пересечения прямой OC_1 с четырёхугольником, являющимся сечением призмы плоскостью ABM , совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

4.2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Точки M и N являются серединами рёбер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Докажите, что точка пересечения прямой CM с четырёхугольником, являющимся сечением призмы плоскостью ABN , совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

5.1

Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Основание высоты пирамиды совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB . Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ .

5.2

Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 10$, $BC = 5\sqrt{2}$. Боковое ребро $SA = 10$ перпендикулярно основанию. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BP и DQ на ребро SC . Докажите, что точка P является серединой отрезка CQ .

6.1

В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S точки M и N являются серединами рёбер AB и BC соответственно. На ребре SA отмечена точка K . Сечение пирамиды плоскостью MNK является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке Q . Докажите, что точка Q лежит на высоте пирамиды.

6.2

В правильном тетраэдре $SABC$ ребро равно 20. На рёбрах AB , AS и CS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = AN = 5$, $BK = 8$. Докажите, что центр грани ABC принадлежит плоскости MNK .

7.1

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB . Докажите, что $SA = SC$.

7.2

В треугольной пирамиде $SABC$ проведена высота SO . Точка O лежит на ребре AB так, что $AO = 2$. В основании пирамиды треугольник со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{28}$. Докажите, что $SB = SC$.

8.1

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает рёбра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N , M соответственно, причём $SK : KB = 2 : 1$, а точки L и M являются соответственно серединами рёбер SA и SD . Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как 3 : 4.

8.2

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает рёбра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N , M соответственно, причём $SK : KB = 3 : 1$, а точки L и M являются соответственно серединами рёбер SA и SD . Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как 3 : 4.

9.1

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает рёбра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N , M соответственно, причём $SK : KB = 2 : 1$, а точки L и M являются соответственно серединами рёбер SA и SD . Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен 45° , площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $14\sqrt{3}$, площадь основания пирамиды равна 54.

9.2

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает рёбра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N , M соответственно, причём $SK : KB = 3 : 1$, а точки L и M являются соответственно серединами рёбер SA и SD . Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен 30° , площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $10\sqrt{2}$, площадь основания пирамиды равна 32.

10.1

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 10 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB , AD и CD отмечены точки K , L и M соответственно, причём $BK = 2$, $AL = 4$, $MD = 3$. Найдите длину отрезка пересечения грани ABC и плоскости KLM .

10.2

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 3 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB , AD и CD отмечены точки K , L и M соответственно, причём $BK = AL = MD = 1$. Найдите длину отрезка пересечения грани ABC и плоскости KLM .

11.1

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость α проходит через вершины B_1 и D , пересекает стороны AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Сечение призмы плоскостью α является ромбом. Найдите высоту призмы, если площадь основания равна 3, а площадь сечения равна 6.

11.2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость α проходит через вершины B_1 и D , пересекает стороны AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Известно, что четырёхугольник MB_1KD является ромбом. Найдите высоту призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если площадь её основания $ABCD$ равна 4, а площадь ромба MB_1KD равна $4\sqrt{2}$.

12.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O является центром основания пирамиды, а точка M является серединой ребра SC . Точка K делит ребро BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B . Сторона основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды $3\sqrt{7}$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

12.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O является центром основания пирамиды, а точка M является серединой ребра SC . Точка K делит ребро BC в отношении $3 : 2$, считая от вершины B . Сторона основания пирамиды равна 4, а высота пирамиды $2\sqrt{23}$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .