

16.1 Показательные неравенства. Замена переменных. Метод интервалов.

1. Замена $t = a^x$. Метод интервалов.

а) $\frac{2}{7^x-7} \geq \frac{5}{7^x-4}$

б) $\frac{2}{3^x-9} \geq \frac{8}{3^x-3}$

в) $\frac{2}{3^x+27} \geq \frac{1}{3^x-27}$

г) $\frac{6}{5^x-125} \leq \frac{1}{5^x-25}$

2. Замена. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Метод интервалов.

а) $\frac{4^x+7 \cdot 2^x-48}{2^x-32} \leq 1$

б) $\frac{9^x+2 \cdot 3^x-117}{3^x-27} \leq 1$

в) $\frac{2 \cdot 2^x-7}{4^x-2 \cdot 2^x-3} \leq 1$

г) $\frac{4^x-6 \cdot 2^x-20}{2^x-32} \geq 1$

3.

а) $\frac{3 \cdot 9^x-27 \cdot 3^x+3}{3^x-9} + \frac{1}{3^x-1} \geq 3 \cdot 3^x$

б) $\frac{49^x-6 \cdot 7^x+3}{7^x-5} + \frac{6 \cdot 7^x-39}{7^x-7} \leq 7^x + 5$

в) $\frac{1}{2^x-1} + \frac{2 \cdot 4^x-32 \cdot 2^x+4}{2^x-16} \geq 2 \cdot 2^x$

г) $\frac{25^x-6 \cdot 5^x+3}{5^x-5} + \frac{6 \cdot 5^x-39}{5^x-7} - 5^x - 5 \geq 0$

4. Замена (сначала упростить степени). Прежде чем приводить всё к общему знаменателю, разложить квадратный трёхчлен в знаменателе на множители. Метод интервалов.

а) $\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-4 \cdot 3^x+5}{9^{x+\frac{1}{2}}-4 \cdot 3^x+1} + \frac{5 \cdot 3^x-19}{3^x-4} \leq \frac{2 \cdot 3^{x+2}-12}{3^{x+1}-1}$

б) $\frac{4^x-2^{x+3}+7}{4^x-5 \cdot 2^x+4} \leq \frac{2^x-9}{2^x-4} + \frac{1}{2^x-6}$

в) $\frac{5^x}{5 \cdot 5^{x-1}-4} + \frac{5(5^{x-1}+1)}{5^x-5} + \frac{22}{25^x-9 \cdot 5^x+20} \leq 0$

г) $\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-4 \cdot 3^x+5}{9^{x+\frac{1}{2}}-4 \cdot 3^x+1} > \frac{2 \cdot 3^{x+2}-12}{3^{x+1}-1} + \frac{19-5 \cdot 3^x}{3^x-4}$

5. Замена. Возникновение после замены $\frac{1}{t}$ помимо t .

а) $\frac{2^{x+5}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}} \geq 2^x$

б) $\frac{3^x-80 \cdot 3^{-x}-27}{9^{-x}-3^{3-x}} - 3^x \leq 0$

в) $\frac{2 \cdot 3^x-10 \cdot 3^{2-x}}{3^x-3^{2-x}} \geq 1$

г) $\frac{2^{x+1}-17 \cdot 2^{2-x}}{2^x-2^{6-x}} \geq 1$

6. Замена может быть не только вида $t = a^x$.

а) $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0$

б) $5^{\frac{2}{x}+1} - 2 \cdot 5^{\frac{1}{x}+1} - 75 \leq 0$

в) $9^{\frac{1}{x}-1} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{x}-1} - 3 \geq 0$

г) $4^{\frac{2}{x}} - 4^{\frac{1}{x}+1} + 3 \geq 0$

7.

а) $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$

б) $4 \cdot 4^{x^2+2x-5} - 33 \cdot 2^{x^2+2x-5} + 8 \geq 0$

в) $4^{6x-x^2-4} - 34 \cdot 2^{6x-x^2-4} + 64 \geq 0$

г) $36 \cdot 3^{4x-x^2-1} - 9^{4x-x^2-1} > 243$

8. Замену надо делать рационально, обозначая за t максимально возможное.

а) $(9^x - 3^{x+1})^2 + 8 \cdot 3^{x+1} < 8 \cdot 9^x + 20$

б) $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 + 124 \cdot 3^x \geq 62 \cdot 9^x + 63$

в) $(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15$

г) $(16^x - 2 \cdot 4^{x+1})^2 + 23 \cdot (16^x - 2 \cdot 4^{x+1}) + 112 \geq 0$

16.2 Логарифмические неравенства. Замена переменных. Метод интервалов.

1. Повторение. Показательные на замену переменных. Разложение многочлена на множители делением в столбик/с помощью схемы Горнера.

а) $3^{4x+1} - 31 \cdot 27^x + 37 \cdot 9^x - 3^{x+2} \leq 0$

б) $2^{4x} + 5 \cdot 2^{3x} - 2^{2x+3} - 3 \cdot 2^{x+2} \geq 0$

в) $3^{4x} - 2 \cdot 3^{3x+1} - 7 \cdot 3^{2x} + 20 \cdot 3^{x+1} < 0$

г) $5^{4x} + 6 \cdot 5^{3x} - 5^{2x} - 6 \cdot 5^{x+1} \geq 0$

2. Логарифмические на замену переменных. Разложение многочлена на множители делением в столбик/с помощью схемы Горнера.

а) $\lg^4 x - 4 \lg^3 x + 5 \lg^2 x - 2 \lg x \geq 0$

б) $3 \lg^4 x - 31 \lg^3 x + 37 \lg^2 x - 9 \lg x < 0$

в) $\log_2^4 x - 6 \log_2^3 x - 7 \log_2^2 x + 60 \log_2 x \leq 0$

г) $\log_2^4 x - 4 \log_2^3 x + 5 \log_2^2 x - 2 \log_2 x > 0$

3. Замена переменных. Метод интервалов.

а) $\frac{5 \lg^2 x - 1}{\lg^2 x - 1} \geq 1$

б) $\frac{5 \log_2^2 x - 100}{\log_2^2 x - 25} \geq 4$

в) $\frac{4 \lg^2 x - 4}{\lg^2 x - 4} \geq 1$

г) $\frac{5 \log_3^2 x - 1}{\log_3^2 x - 1} < 1$

4. Упростить, прежде чем вводить замену. Внимательно опускать чётную степень из-под логарифма.

а) $\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1 \right) \leq 0$

б) $\frac{\log_8 x}{\log_8(\frac{x}{64})} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}$

в) $\frac{\log_3 x}{\log_3(\frac{x}{27})} \geq \frac{2}{\log_3 x} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$

г) $\frac{\log_7(49x^2) + 5}{\log_7^2 x - 1} - \frac{3}{\log_7 x - 1} \cdot \left(1 + \frac{2}{\log_7(7x)} \right) \geq 0$

5.

а) $\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1$

б) $\frac{2 \log_3(9x) - 13}{\log_3^2 x - \log_3 x^4} \leq 1$

в) $\frac{\log_2(32x) - 1}{\log_2^2 x - \log_2 x^5} \geq -1$

г) $\frac{\log_6(36x) - 1}{\log_6^2 x - \log_6 x^3} < 0$

6.

a) $\log_2^2(25 - x^2) - 7 \log_2(25 - x^2) + 12 \geq 0$

б) $2 \log_4^2(20 - x^2) - 7 \log_4(20 - x^2) + 6 \geq 0$

в) $\log_3^2(20 - x^2) - 5 \log_3(20 - x^2) + 6 < 0$

г) $\log_5^2(49 - x^2) - 5 \log_5(49 - x^2) + 6 \leq 0$

7. Прежде чем делать замену, увидеть, что основания у логарифмов разные, сделать одинаковыми.

a) $\log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10 \log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0$

б) $\log_4^2(10 - x^2) + 8 \log_{0,25}(10 - x^2) + 12 \geq 0$

в) $\log_3^2(20 - x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(20 - x^2) - 6 > 0$

г) $\log_2^2(16 - x^2) + \log_{0,5}(16 - x^2) - 20 \geq 0$

8.

a) $(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11 \log_2^2 x - 22 \log_2 x - 24$

б) $(\lg^2 x - 2 \lg x)^2 + \lg^2 x < \lg x^2$

в) $(\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x)^2 - 8 \log_{0,5}^2 x \geq 4 \log_{0,5} x^2 - 12$

г) $(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 + \log_2^2 x \geq \log_2 x^2$

9. Замена $x^2 = t$.

a) $5^{\log_5(9-x^2)} + x^4 - 29 \geq 0$

б) $2^{\log_2(25-x^2)} + x^4 - 37 \leq 0$

в) $7^{\log_7(4-x^2)} + x^4 - 6 > 0$

г) $3^{\log_3(16-x^2)} + x^4 - 28 \geq 0$

16.3 Потенцирование и логарифмирование. Метод равносильных переходов.

1. Потенцирование.

- а) $\log_4(6 - 6x) < \log_4(x^2 - 5x + 4) + \log_4(x + 3)$
б) $\log_2((x - 1)(x^2 + 2)) \leq 1 + \log_2(x^2 + 3x - 4) - \log_2 x$
в) $\log_{\frac{1}{3}}(18 - 9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$
г) $\log_{\frac{1}{5}}(25 - 25x) < \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3) + \log_{\frac{1}{5}}(x + 7)$

2.

- а) $\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq \log_7(2 - \frac{1}{x})$
б) $\log_5(3x + 1) + \log_5(\frac{1}{72x^2} + 1) \geq \log_5(\frac{1}{24x} + 1)$
в) $\log_2(x - 1) + \log_2(2x + \frac{4}{x-1}) \geq 2 \log_2 \frac{3x-1}{2}$
г) $\log_2(\frac{1}{x} - 1) + \log_2(\frac{1}{x} + 1) \leq \log_2(27x - 1)$

3. Метод равносильных переходов. Подготовительное.

- а) $\sqrt{x^3 + 6x^2 - 19x - 23} > 1$
б) $\sqrt{x^3 - 10x^2 + 3x + 58} > 2$
в) $\sqrt{x^3 + x^2 - 4x - 3} \geq 1$
г) $\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 3} \leq 1$

4. Метод равносильных переходов.

- а) $2 \log_7(x\sqrt{2}) - \log_7(\frac{x}{1-x}) \leq \log_7(8x^2 + \frac{1}{x} - 5)$
б) $\lg(5x^2 - 15) - \lg x < \lg(5x^2 + \frac{5}{x} - 10x)$
в) $\log_5(3x^2 - 2) - \log_5 x < \log_5(3x^2 + \frac{1}{x} - 3)$
г) $2 \log_2(x\sqrt{5}) - \log_2(\frac{x}{1-x}) \leq \log_2(5x^2 + \frac{1}{x} - 2)$

5.

- а) $2 \log_2(x\sqrt{3}) - \log_2 \frac{x}{x+1} \geq \log_2(3x^2 + \frac{1}{x})$
б) $\log_2(x - 1) + \log_2(x^2 + \frac{1}{x-1}) \leq 2 \log_2 \frac{x^2+x-1}{2}$
в) $\log_5(4 - x) + \log_5 \frac{1}{x} \leq \log_5(\frac{1}{x} - x + 3)$
г) $2 \log_2(1 - 2x) - \log_2(\frac{1}{x} - 2) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1)$

6. Логарифмирование. Приводим к виду $a^{f(x)}$ и $b^{g(x)}$.

- а) $8 \cdot 7^{2x+1} \leq 16^{1-x^2}$ б) $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3$
в) $2^{x^2} \cdot 7^{x-2} \geq 16$ г) $4^{2x^2-2} \cdot 7^{2x+1} > 0,125$

16.4 Метод рационализации.

1.

a) $(5x - 13) \log_{2x-5}(x^2 - 6x + 10) \geq 0$

б) $(20 - 11x) \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leq 0$

в) $(3x - 8) \log_{2x+1}(x^2 + 4x + 5) > 0$

г) $(5x + 4) \log_{3x+3}(x^2 + 6x + 10) \leq 0$

2.

a) $\frac{25^{x^2+x-10} - (0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5 \cdot 4^{x-1} - 1} \leq 0$

б) $\frac{16 \cdot 2^{x^2(x-3)} - (0,125)^{x^2-4}}{0,04 \cdot 25^{2x^2-11} - 5} \geq 0$

в) $\frac{4^{x^2+x-4} - (0,5)^{2x^2-2x-1}}{0,2 \cdot 5^x - 1} \leq 0$

г) $\frac{9^{x^2+x-4} - (\frac{1}{3})^{2x^2-2x-1}}{0,25 \cdot 2^x - 1} > 0$

3.

a) $\frac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)} \leq 0$

б) $\frac{\log_5(3x^2+11x+6)+\log_{0,2}(x^2+1)}{\log_{0,2}(7-x)} \geq 0$

в) $\frac{\log_2(2x^2+7x+10)+\log_{0,5}(x^2+x+1)}{\log_{0,01}(5-x)} \geq 0$

г) $\frac{\log_4(3x^2+10x+6)+\log_{0,25}(2x^2+6x+2)}{\log_{\frac{1}{3}}(10-x)} \leq 0$

4.

a) $(4^{x^2-x-6} - 1) \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \leq 0$

б) $(9^{x^2-1} - 3^{5x+1}) \log_{\frac{1}{3}}(3^{x^2+4x+5} - 2) \geq 0$

в) $(7^{x^2+3x-4} - 1) \log_{0,5}(3^{x^2+6x+10} - 2) \leq 0$

г) $(6^{x^2+5x+6} - 1) \log_{0,25}(6^{x^2+10x+26} - 5) \leq 0$

5.

a) $27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$

б) $4^{1,5x+0,5} + 17 \cdot 6^x + 2^{x+3} \geq 17 \cdot 4^x + 8 \cdot 3^x + 2 \cdot 12^x$

в) $70^x - 16 \cdot 35^x - 14^x + 16 \cdot 7^x \geq 0$

г) $30^x - 5 \cdot 6^x - 15^x + 5 \cdot 3^x \leq 0$

6.

- a) $\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x-5}$
б) $\frac{x \cdot 7^x - 7^{x+1} - 2x + 14}{175 + x \cdot 5^x - 25x - 7 \cdot 5^x} \geq \frac{1}{5^{x-1} - 5}$
в) $\frac{10^x - 5 \cdot 2^x}{x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x - 5x + 15} \leq \frac{1}{x-3}$
г) $\frac{15^x - 5 \cdot 3^x}{x \cdot 5^x - 5^{x+1} - 5x + 25} > \frac{1}{x-5}$

7.

- a) $x^2 \log_{625}(6-x) \leq \log_5(x^2 - 12x + 36)$
б) $x^2 \log_{243}(4-x) \leq \log_3(x^2 - 8x + 16)$
в) $x^2 \log_{343}(5-x) \leq \log_7(x^2 - 10x + 25)$
г) $x^2 \log_{512}(x+5) \leq \log_2(x^2 + 10x + 25)$

8.

- a) $\frac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2(2x^2 - 10x + 12,5) + 1} \geq 0$
б) $\frac{\log_3 x^2 - \log_5 x^2}{\log_{15}^2(2x^2 - 6x + 4,5) + 1} \geq 0$
в) $\frac{\log_5 x^4 - \log_7 x^4}{\log_2^2(2x^2 + 7x + 7,5) + 2} > 0$
г) $\frac{\log_7 x^2 - \log_5 x^2}{\log_2^4(3x^2 + 5x + 9,5) + 3} \geq 0$

9.

- a) $\frac{\log_2(8x) \cdot \log_3(27x)}{x^2 - |x|} \leq 0$
б) $\frac{\log_3(9x) \cdot \log_5(25x)}{x^3 - |x|} \geq 0$
в) $\frac{\log_7(49x) \cdot \log_2(4x)}{x^2 + |x|} > 0$
г) $\frac{\log_7(7x) \cdot \log_2(16x)}{x^3 + |x|} \geq 0$

10.

- a) $\frac{2^{3x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} - 16}{x-1} \geq 0$
б) $\frac{27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729}{50x^2 + 10x + 0,5} \leq 0$
в) $\frac{27^{x+1} - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+2} - 1}{50x^2 - 50x + 12,5} \geq 0$
г) $\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0$

11.

a) $\frac{27x^3+9x^2-3x-1}{64x^2-4\cdot 8x^2+4} \geq 0$

б) $\frac{8x^3+4x^2-2x-1}{81x^2-6\cdot 9x^2+9} \geq 0$

в) $\frac{x^3-x^2-x+1}{4x^2-16\cdot 2x^2+64} \leq 0$

г) $\frac{x^3-x^2-x+1}{9x^2-18\cdot 3x^2+81} \leq 0$

12.

a) $\frac{1,5^x-3,375}{0,25^x-0,5^{x-3,5}+32} \leq 0$

б) $\frac{2,5^x-0,16}{0,25^x-0,5^{x-4,5}+128} \leq 0$

в) $\frac{0,1^x-100}{4^x-2^{x+3,5}+32} \leq 0$

г) $\frac{0,2^x-125}{4^x-2^{x+2,5}+8} \leq 0$

13.

a) $\frac{x^2+4x-5}{\log_3(0,2\cdot 5^x)} \geq 0$

б) $\frac{x^2+x-6}{\log_5(0,25\cdot 2^x)} \geq 0$

в) $\frac{x^2-4x+3}{\log_2(0,2\cdot 5^x)} \leq 0$

г) $\frac{x^2-x-6}{\log_7(0,125\cdot 2^x)} \leq 0$

16.5 Задачи для самостоятельного решения.

1.1 Метод рационализации.

$$2 \log_{(x^2-6x+10)^2} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3)$$

1.2

$$3 \log_{(x^2-4x+5)^3} (7x^2+8) \geq \log_{x^2-4x+5} (6x^2+7x+7)$$

2.1 Потенцирование.

$$\log_{0,2} (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) \leq \log_{0,04} (x - 2)^4$$

2.2

$$\log_{0,3} (x^3 + 6x^2 + 9x) \geq \log_{0,09} (x + 3)^4$$

3.1 Метод рационализации.

$$\frac{\log_5(5x-27)}{\log_5(x-5)} \geq 1$$

3.2

$$\frac{\log_3(7x-2)}{\log_3(x-1)} \leq 1$$

4.1 Потенцирование.

$$\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$$

4.2

$$\frac{\log_2(5-x) - \log_2(x+3)}{\log_2^2 x^2 + 3 \log_2 x^4 + 9} \leq 0$$

5.1 Замена.

$$\log_{49} (x + 4) + \log_{x^2+8x+16} \sqrt{7} \leq -\frac{3}{4}$$

5.2

$$\log_{25} (x + 3) + \log_{x^2+6x+9} \sqrt{5} \leq -\frac{3}{4}$$

6.1 Замена. Метод рационализации.

$$\frac{\log_x(2x^{-1}) \cdot \log_x(2x^2)}{\log_{(2x)} x \cdot \log_{(2x-2)} x} < 40$$

$$6.2 \frac{\log_x(3x^{-1}) \cdot \log_x(3x^3)}{\log_{(3x)} x \cdot \log_{(3x-3)} x} < 105$$