

14.1 Сведение к квадратному и к биквадратному, разложение на множители. Основное тригонометрическое тождество.

1. Сведение к квадратному с помощью замены.

- а) $4 \sin^2 x - 12 \sin x + 5 = 0$
- б) $6 \cos^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$
- в) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
- г) $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$

2. Сведение к квадратному с помощью замены.

- а) $\operatorname{tg}^2 x + (1 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$
- б) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 x + 2 \operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$
- в) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$
- г) $\operatorname{ctg}^2 x + (1 - \sqrt{3}) \operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$

3. Основное тригонометрическое тождество. Сведение к квадратному с помощью замены.

- а) $6 \cos^2 x + 5\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$
- б) $8 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x + 1 = 0$
- в) $6 \sin^2 x + 5 \cos x - 2 = 0$
- г) $4 \cos^2 x - 4 \sin x - 1 = 0$

4. Сведение к биквадратному с помощью замены.

- а) $4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1 = 0$
- б) $16 \cos^4 x - 24 \cos^2 x + 9 = 0$
- в) $\sin^4 x - 3 \sin^2 x + 2 = 0$
- г) $4 \sin^4 x + 13 \sin^2 x - 12 = 0$

5. Основное тригонометрическое тождество. Вынесение множителя.

- а) $2 \sin^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$
- б) $\sin^3 x + \cos^2 x = 1$
- в) $2 \sin^3 x + \cos^2 x = 1$
- г) $\sin^3 x + 2 \cos^2 x = 2$

6. Разложение на множители.

- а) $2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$
- б) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3 = 0$
- в) $2 \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$
- г) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$

7. Основное тригонометрическое тождество. Разложение на множители.

- а) $\sqrt{2} \sin^3 x - \sqrt{2} \sin x + \cos^2 x = 0$
- б) $2 \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos^3 x$
- в) $2 \cos^3 x - 2 \cos x + \sin^2 x = 0$
- г) $2 \cos x + \sin^2 x = 2 \cos^3 x$

14.2 Косинус двойного угла. Синус двойного угла. Формулы приведения.

1. Повторение. Замена. Делать её лучше рационально.

- а) $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 2 = 0$
- б) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} + 2 = 0$
- в) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 2 = 0$
- г) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0$

2. Косинус двойного угла.

- а) $\cos 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$
- б) $\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$
- в) $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$
- г) $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25$

3. Формулы приведения.

- а) $2\cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$
- б) $2\sin^2 x = 3\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} - x) + 4$
- в) $6\sin^2 x + 15\sin(\frac{3\pi}{2} + x) - 12 = 0$
- г) $2\sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3}\sin(\frac{3\pi}{2} + x)$

4. Формула приведения в квадрате.

- а) $2\cos^2(\frac{3\pi}{2} + x) + \sqrt{3}\sin x = 0$
- б) $2\sin^2(\frac{\pi}{2} - x) + \sqrt{2}\cos x = 0$
- в) $2\cos^2(\frac{9\pi}{2} + x) + \sin x = 1$
- г) $2\cos^2(\frac{3\pi}{2} - x) + \sqrt{3}\sin x = 0$

5. Косинус двойного угла, формулы приведения.

- а) $\cos 2x + \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2} - x) - 1 = 0$
- б) $\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = 0$
- в) $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} - x) + 1 = 0$
- г) $\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = -1$

6. Синус двойного угла.

- а) $\sin 2x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$
- б) $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - 2\cos x = \sqrt{3}$
- в) $0,5\sin 2x - 3\sin x = 3 - \cos x$
- г) $5\sin 2x + 10\cos x + 20 = -20\sin x$

7. Синус двойного угла, формулы приведения.

- а) $\frac{\sin 2x}{\sin(\frac{3\pi}{2} - x)} = \sqrt{2}$
- б) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2} + x)$
- в) $\frac{\sin 2x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = \sqrt{3}$
- г) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2} + x)$

8.

a) $2 + 2 \cos(\pi + 2x) - \sqrt{8} \sin x = \sqrt{6} - \sqrt{12} \sin x$

б) $2 - 2 \cos(\pi + 2x) - \sqrt{8} \cos x = \sqrt{6} - \sqrt{12} \cos x$

в) $1 - \cos 2x - \sqrt{3} \sin(x + \pi) = \sqrt{3} + 2 \sin x$

г) $2 \cos(2\pi + 2x) - 2 + \sqrt{8} \sin x = -\sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x$

14.3 Чётность и нечётность. Формулы сложения. Однородные 1-ой степени.

1. Повторение. Синус двойного угла.

- а) $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$
б) $\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 8 \cos^2 \frac{x}{2}$
в) $\frac{\sqrt{3} \sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 8 \cos^2 \frac{x}{2}$
г) $\frac{\sqrt{2} \sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 8 \cos^2 \frac{x}{2}$

2. Чётность-нечётность.

- а) $2 \cos^2 x - 3 \sin(-x) - 3 = 0$
б) $4 \cos^2 x - 12 \sin(-x) - 9 = 0$
в) $2 \cos^2 x - \sin(-x) - 1 = 0$
г) $6 \cos^2 x - 5\sqrt{2} \sin(-x) + 2 = 0$

3. Чётность-нечётность.

- а) $6 \cos^2 x - 7 \cos(-x) - 5 = 0$
б) $4 \cos^2 x - 4 \cos(-x) - 3 = 0$
в) $2 \cos^2 x + (\sqrt{2} - 2) \cos(-x) - \sqrt{2} = 0$
г) $2 \cos^2 x - (\sqrt{2} - 2) \cos(-x) - \sqrt{2} = 0$

4. Чётность-нечётность, группировка.

- а) $2 \sin x + 2\sqrt{2} \sin(-x) - 4 \cos^2 x = \sqrt{2} - 4$
б) $2 \sin x + 2\sqrt{3} \sin(-x) - 4 \cos^2 x = \sqrt{3} - 4$
в) $2 \sin(-x) + 2\sqrt{3} \sin x - 4 \cos^2 x = \sqrt{3} - 4$
г) $2 \cos(-x) - 2\sqrt{2} \cos x - 4 \sin^2 x = \sqrt{2} - 4$

5. Формулы сложения.

- а) $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x$
б) $2 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{6} \cos x = \sin 2x - \sqrt{3}$
в) $2 \cos^2 x - \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x) = \sin x + 1$
г) $8 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 4 \sin^2 x = 4\sqrt{3} \sin 2x + 1$

6. Формулы сложения.

- а) $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos(x + \frac{7\pi}{6}) = 3 \cos x$
б) $\sin 2x - 2 \cos(x - \frac{4\pi}{3}) - \sqrt{3} \sin x = 0$
в) $\sin 2x - 2\sqrt{2} \cos(x + \frac{7\pi}{6}) - \sqrt{6} \cos x = 0$
г) $\sin 2x + 4 \cos(x - \frac{4\pi}{3}) + 2\sqrt{3} \sin x = 0$

7. Однородные 1-ой степени. Подготовительное.

- а) $\sin x = \cos x$
б) $\sin x + \cos x = 0$
в) $\sin x = \sqrt{3} \cos x$
г) $\sqrt{3} \sin x = \cos x$

8. Однородные 1-ой степени.

а) $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \sin 2x$

б) $\frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} = -\sin 2x$

в) $\frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \sin 2x$

г) $\frac{2}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} + \sin 2x = 0$

14.4 Смешанные. Исследование ОДЗ.

1. Возникновение простейшего уравнения вида $\sin 2x = a$.

- а) $4 \sin^2 x = \operatorname{tg} x$
- б) $2\sqrt{2} \sin^2 x - \operatorname{tg} x = 0$
- в) $2\sqrt{2} \cos^2 x = -\operatorname{ctg} x$
- г) $4\sqrt{3} \sin^2 x = 3 \operatorname{tg} x$

2. Смешанные с показательными.

- а) $(25^{\sin x})^{-\cos x} = 5^{\sqrt{2} \sin x}$
- б) $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$
- в) $(36^{\sin x})^{\cos x} = 6$
- г) $(49^{\sin x})^{\cos x} = 1$

3. Смешанные с показательными. Сведение к квадратному.

- а) $8 \cdot 16^{\cos x} - 6 \cdot 4^{\cos x} + 1 = 0$
- б) $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$
- в) $81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0$
- г) $2^{4 \cos x} + 3 \cdot 2^{2 \cos x} - 10 = 0$

4. Смешанные с показательными. Замена.

- а) $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$
- б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2$
- в) $4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}$
- г) $4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}$

5. Смешанные с логарифмами, сведение к квадр. Исследование ОДЗ.

- а) $2 \log_3^2(2 \cos x) - 5 \log_3(2 \cos x) + 2 = 0$
- б) $2 \log_2^2(2 \sin x) - 7 \log_2(2 \sin x) + 3 = 0$
- в) $2 \log_4^2(4 \cos x) - 7 \log_4(4 \cos x) + 3 = 0$
- г) $2 \log_2^2(2 \cos x) - 9 \log_2(2 \cos x) + 4 = 0$

6. Смешанные с логарифмами. Автоматическое выполнение ОДЗ.

- а) $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$
- б) $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$
- в) $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$
- г) $\log_8(7\sqrt{3} \sin x - \cos 2x - 10) = 0$

7. Смешанные с линейными. Разложение на множители.

- а) $2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$
- б) $x \operatorname{tg} x - 7 \operatorname{tg} x + x - 7 = 0$
- в) $x \cos x + 4 \cos x - x - 4 = 0$
- г) $2x \cos x + 6 \cos x + \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} = 0$

8. Смешанные с логарифмами. Исследование ОДЗ.

а) $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$

б) $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0$

в) $\frac{\log_2^2(\cos x) + \log_2(\cos x)}{2 \sin x + \sqrt{3}} = 0$

г) $\frac{\log_2^2(\cos x) + \log_2(\cos x)}{2 \sin x - \sqrt{3}} = 0$

9. Смешанные с показательными. Исследование ОДЗ.

а) $\frac{4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{5} \sin x} = 0$

б) $\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2} \sin x}}{\sqrt{3} \sin x} = 0$

в) $\frac{4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{2} \cos x}}{\sqrt{6} \cos x} = 0$

г) $\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{3} \cos x}}{\sqrt{3} \cos x} = 0$

14.5 Задачи для самостоятельного решения.

1.1

а) Решить уравнение

$$x \cdot \sin x + 5 \sin x - x - 5 = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

1.2

а) Решить уравнение

$$x \cdot \operatorname{tg} x + 7 \operatorname{tg} x + x + 7 = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi; 0)$.

2.1

а) Решить уравнение:

$$3 \operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(2\pi; 3\pi)$.

2.2

а) Решить уравнение:

$$3 \operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 5 = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 4\pi)$.

3.1

а) Решить уравнение:

$$2 \sin^3 x = \cos(x - \frac{\pi}{2}).$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

3.2

а) Решить уравнение:

$$\sin^3 x = \cos(x + \frac{\pi}{2}).$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$.

4.1

а) Решить уравнение:

$$\cos(2x + \frac{\pi}{2}) + \sin x = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(2\pi; 4\pi)$.

4.2

а) Решить уравнение:

$$\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2 \sin x$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$.

5.1

а) Решить уравнение:

$$(2 \cos^2 x + 11 \cos x + 5) \log_2(-\sin x) = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$.

5.2

а) Решить уравнение:

$$(2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2) \log_{25} \cos x = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$.

6.1

а) Решить уравнение:

$$4 \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 2\sqrt{2} \cos(\pi - x) = 2.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{17\pi}{2}; 10\pi]$.

6.2

а) Решить уравнение:

$$4 \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(x + \pi) = -\sqrt{3}.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

7.1

а) Решить уравнение:

$$2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

7.2

а) Решить уравнение:

$$2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0.$$

б) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.