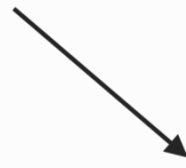
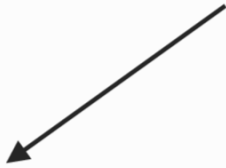


Введение в стереометрию.

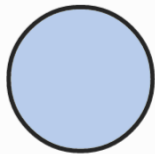
Атанасян, 10-11.

Геометрия



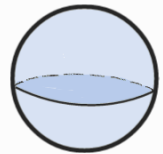
Планиметрия

(фигуры на плоскости,
например, круг)

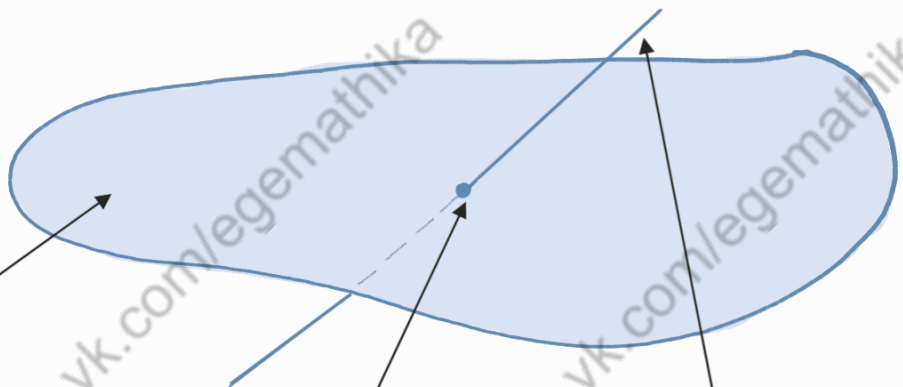


Стереометрия

(фигуры в пространстве, например, шар)



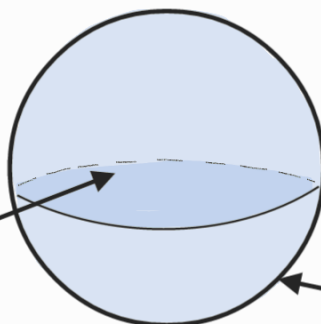
Основные фигуры в пространстве:



плоскость

точка

прямая



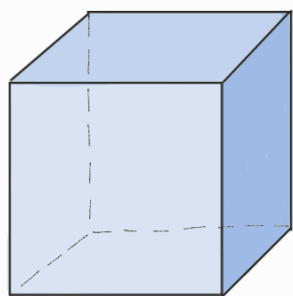
Шар (геом. тело)

Сфера (граница шара - поверхность,
отделяющая от остальной части пространства)

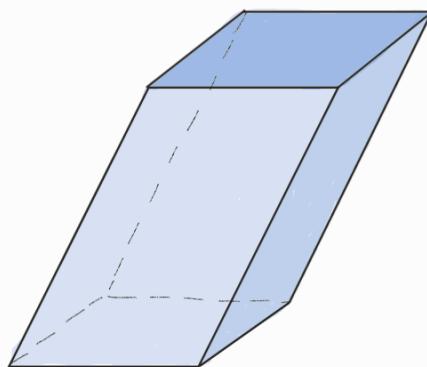
Введение в стереометрию

Атанасян, 10-11.

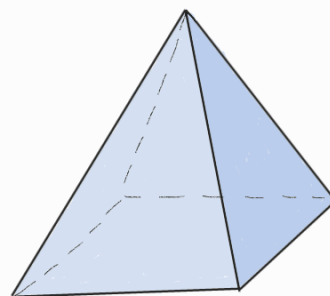
Многогранники:



Куб

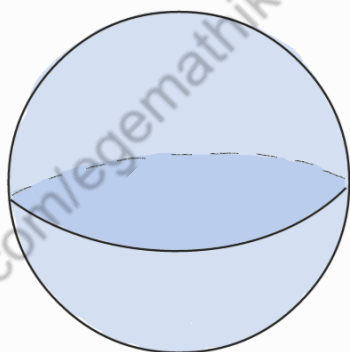


Параллелепипед

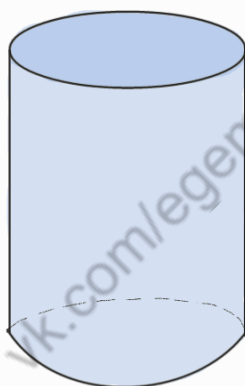


Пирамида

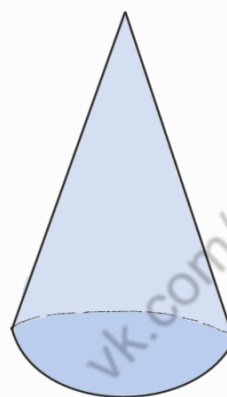
"Круглые" тела:



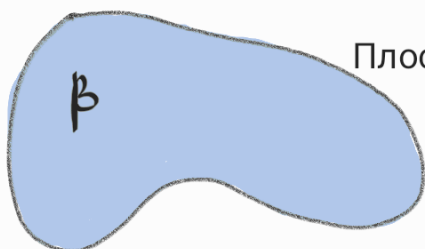
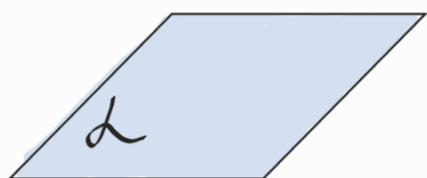
Шар



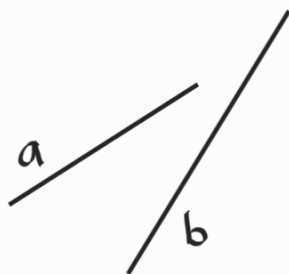
Цилиндр



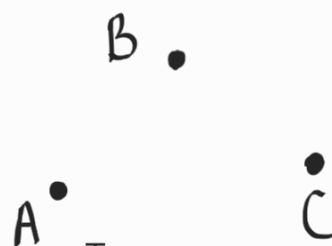
Конус



Плоскости



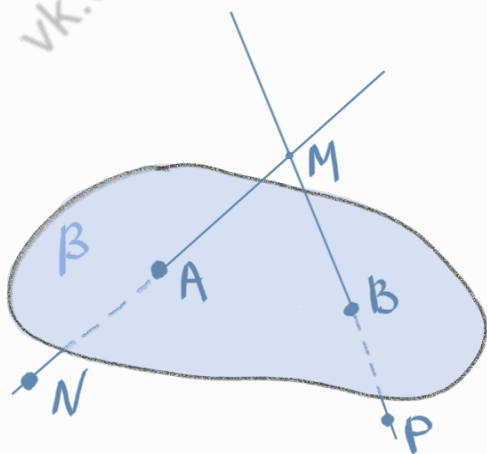
Прямые



Точки

Введение в стереометрию.

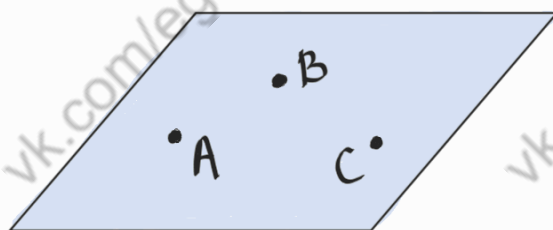
Атанасян, 10-11.



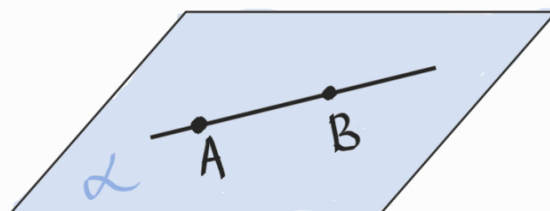
$$A \in \beta, B \in \beta, \\ M \notin \beta, N \notin \beta, P \notin \beta$$

Аксиома - утверждение, принимаемое без доказательства.

Аксиома 1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

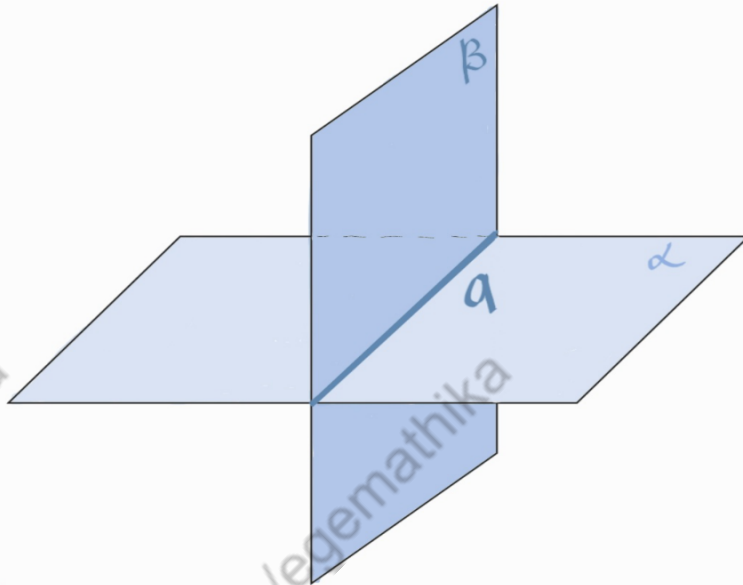


Следствие: если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки.

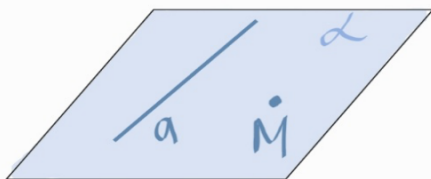
Введение в стереометрию

Атанасян, 10-11.

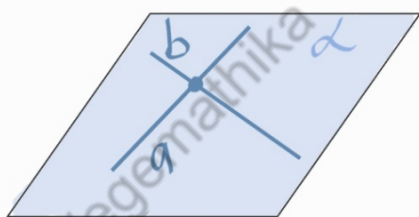
Аксиома 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



Теорема. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



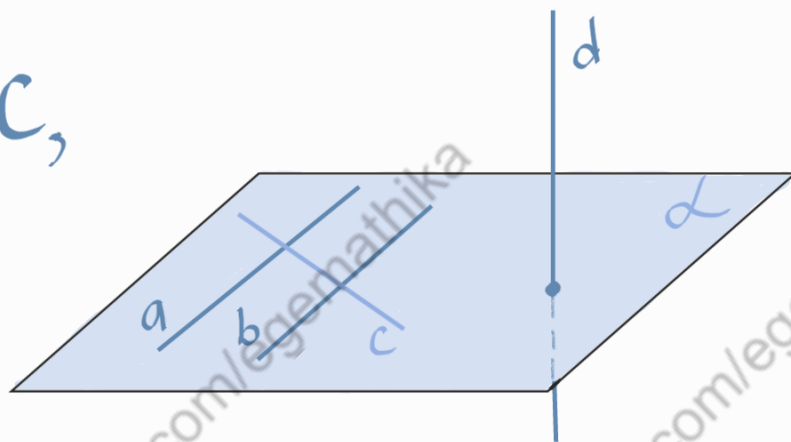
Теорема. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.



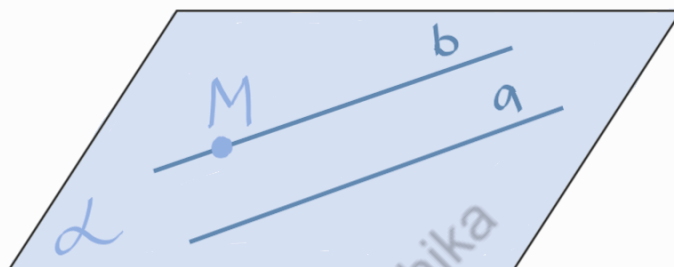
Параллельность прямых, прямой и плоскости.

- Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

$a \parallel b, a \nparallel c,$
 $a \nparallel d$

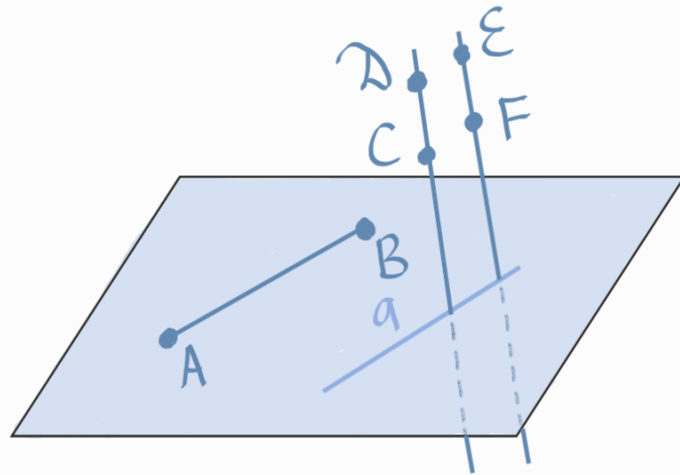


Теорема. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

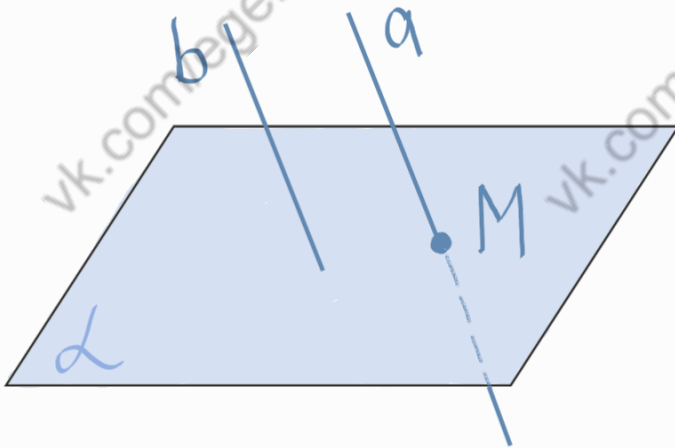


Параллельность прямых, прямой и плоскости.

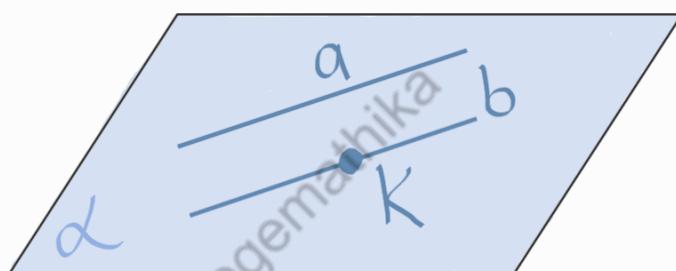
$CD \parallel EF,$
 $AB \cap CD,$
 $AB \parallel \alpha.$



Лемма. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

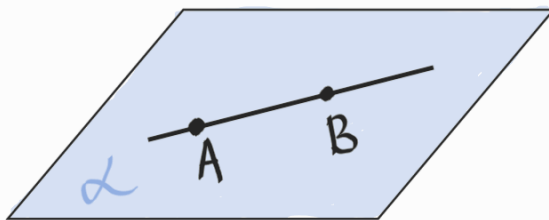


Теорема. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

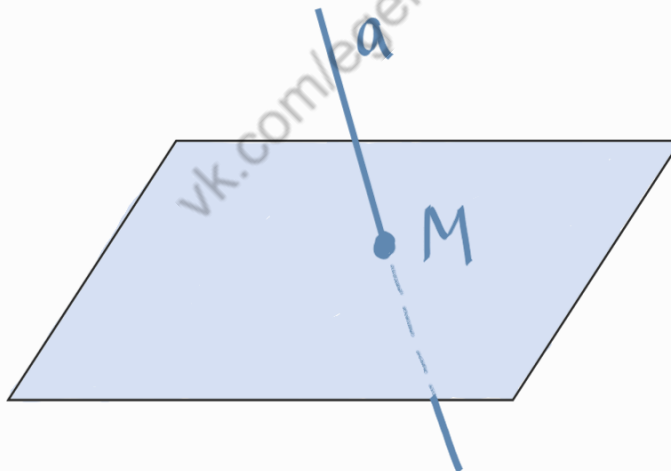


Параллельность прямых, прямой и плоскости.

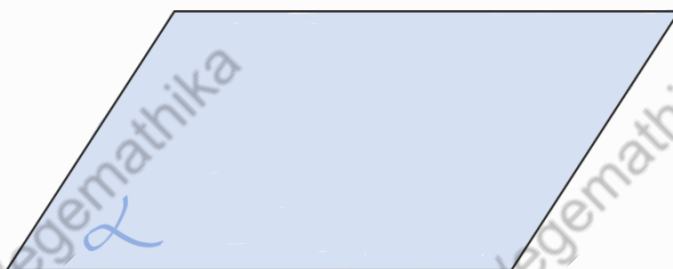
- ☐ Прямая лежит в плоскости.



- ☐ Прямая и плоскость пересекаются.



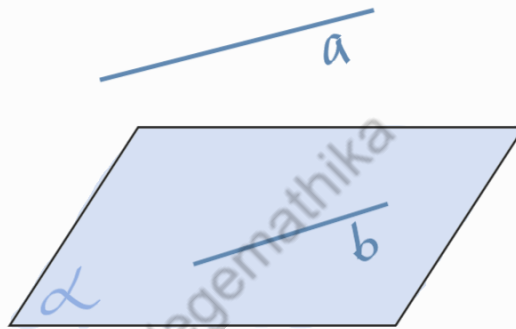
- ☐ Прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки (параллельны)



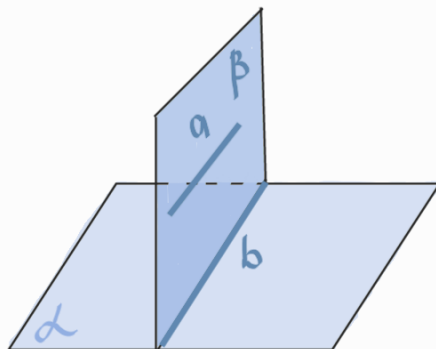
$a \parallel \alpha$

Параллельность прямых, прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.



- Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

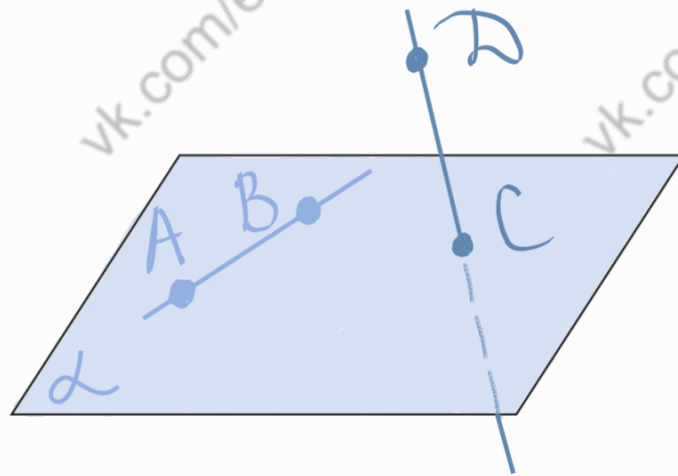


- Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

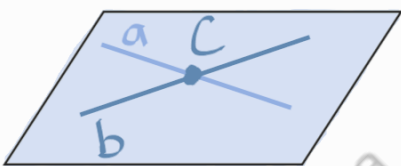
Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми.

- Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

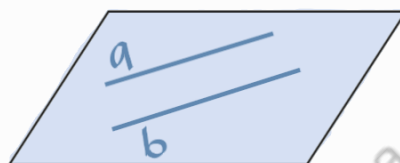
Теорема. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые **скрещивающиеся**.



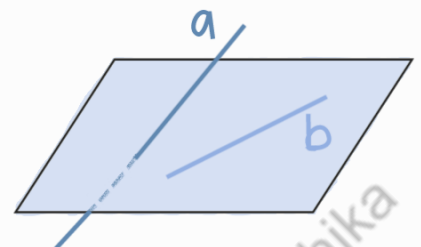
Возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:



Пересекающиеся



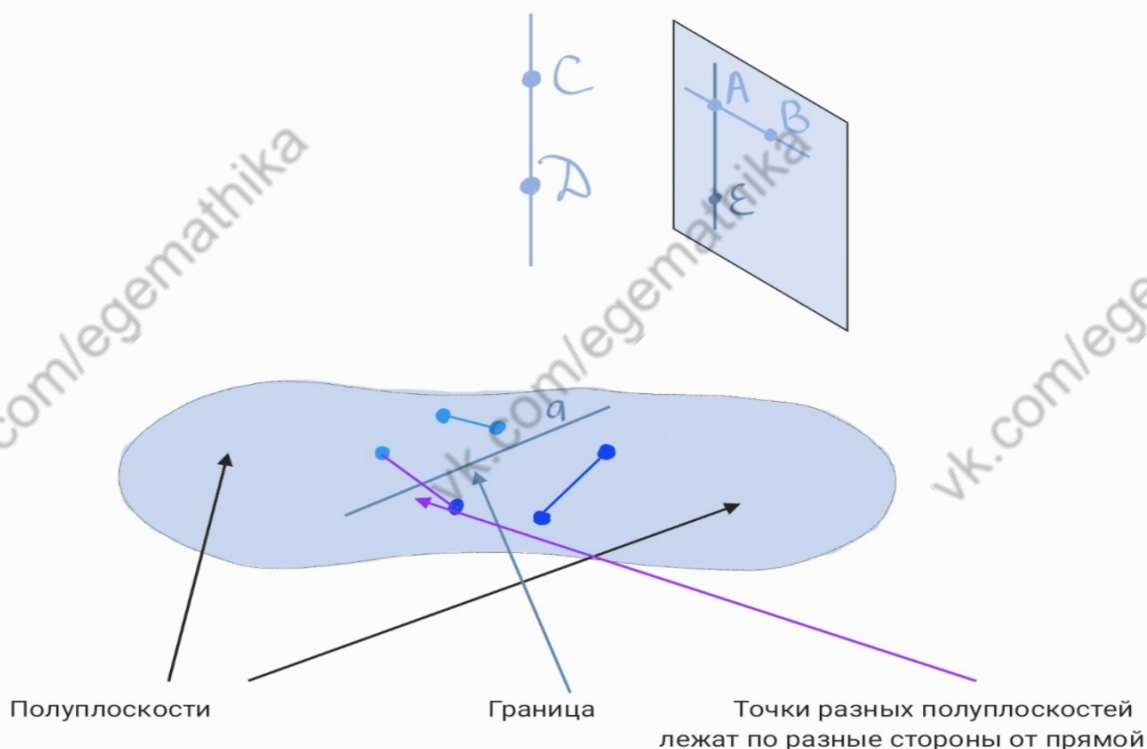
Параллельные



Скрещивающиеся

Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми.

Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

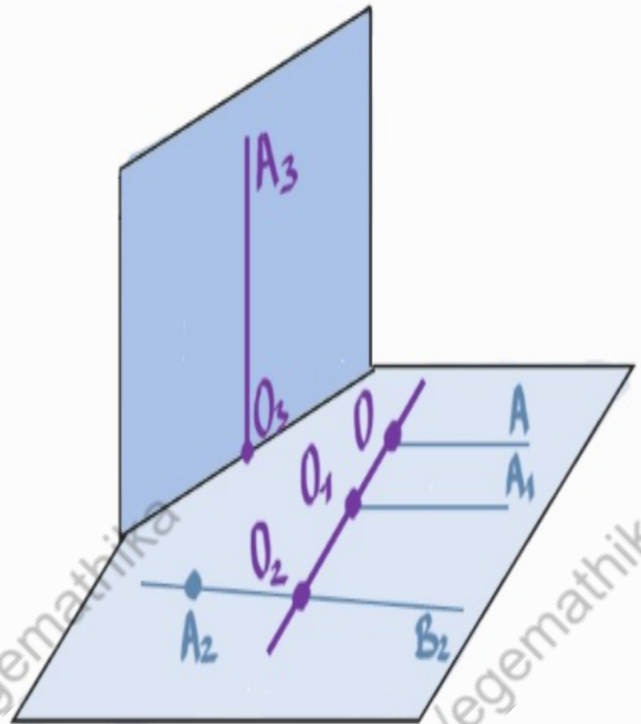


- Два луча OA и $O'A'$, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей OO' .
- Два луча OA и $O'A'$, лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они совпадают или один из них содержит другой.

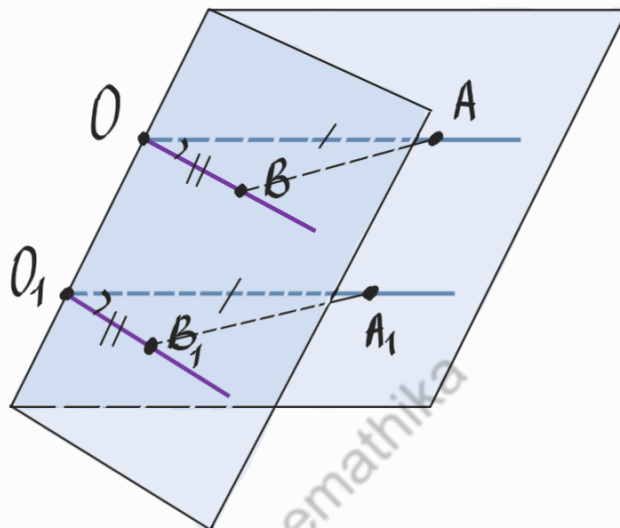
Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми.

Лучи OA и O_1A_1 , A_2B_2 и O_2B_2
сонаправлены.

Лучи OA и O_2A_2 , OA и O_3A_3 ,
 O_2A_2 и O_2B_2 не сонаправлены.

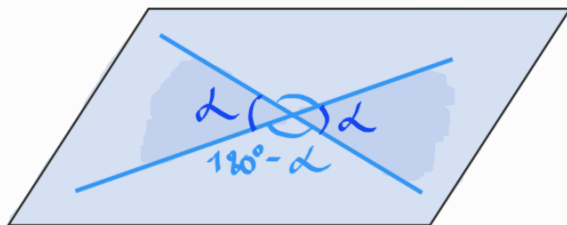


Теорема. Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.



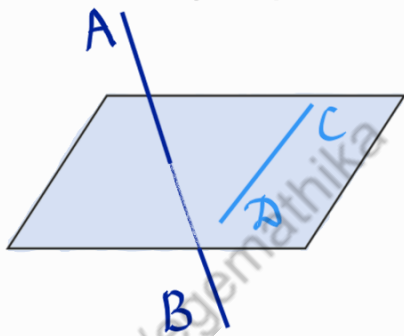
Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми.

Угол между пересекающимися прямыми:



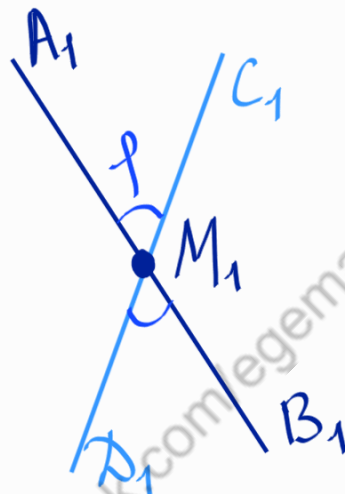
$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

Угол между скрещивающимися прямыми:

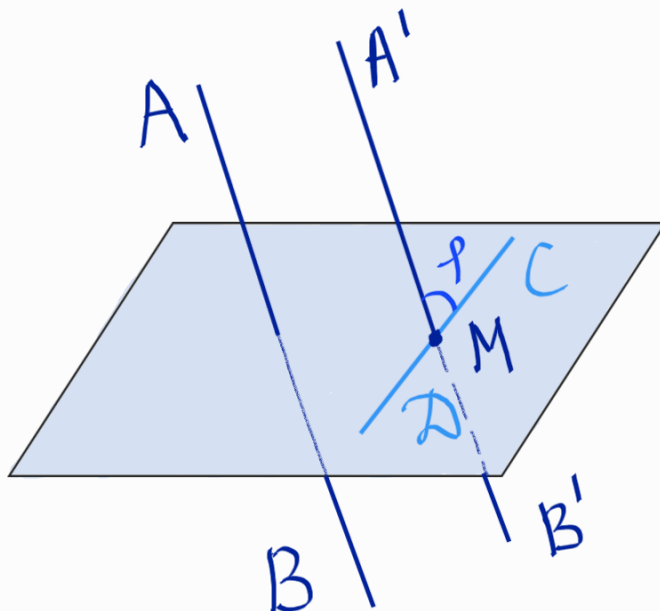


$$A_1B_1 \parallel AB$$

$$C_1D_1 \parallel CD$$



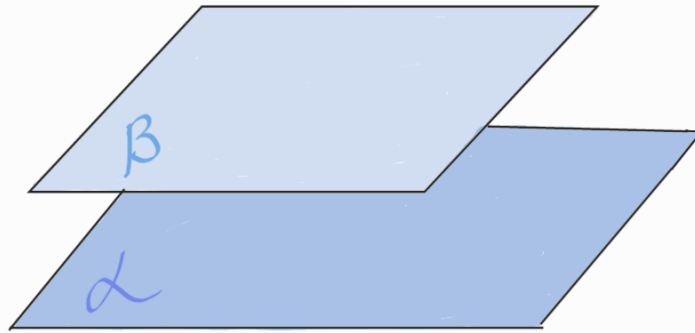
M_1 - произвольная точка



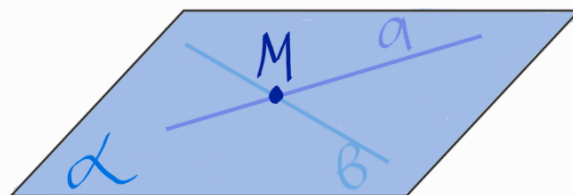
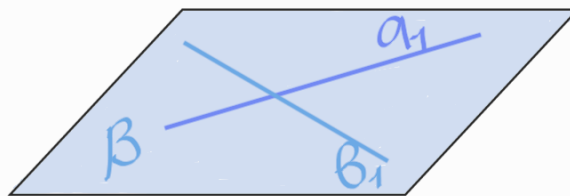
Параллельные плоскости.

Атанасян, 10-11, параграф 3 (гл.1)

Две плоскости либо пересекаются по прямой (аксиома 3), либо не пересекаются, т.е. не имеют ни одной общей точки (параллельны):



Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

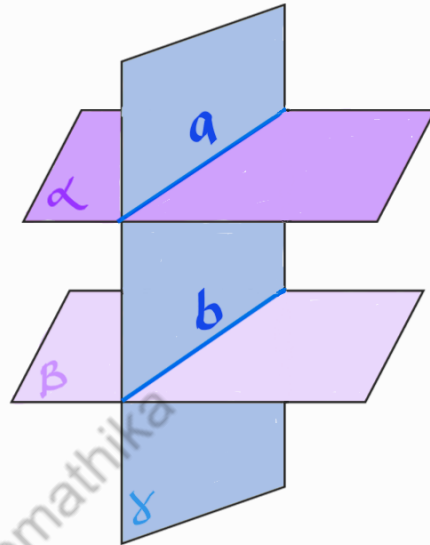


Параллельные плоскости.

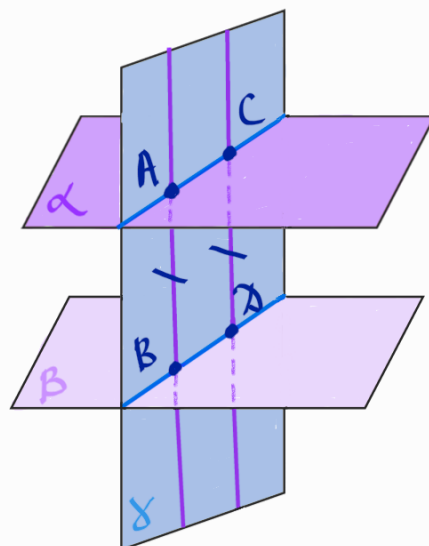
Атанасян, 10-11, параграф 3 (гл.1)

Свойства параллельных плоскостей.

- Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

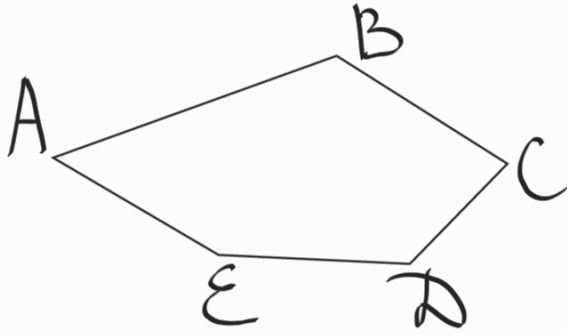


- Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

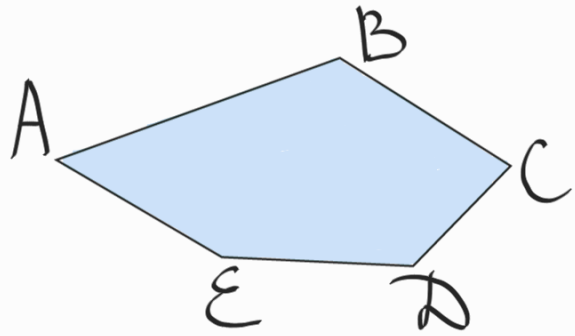


Тетраэдр и параллелепипед.

В планиметрии два толкования многоугольника:



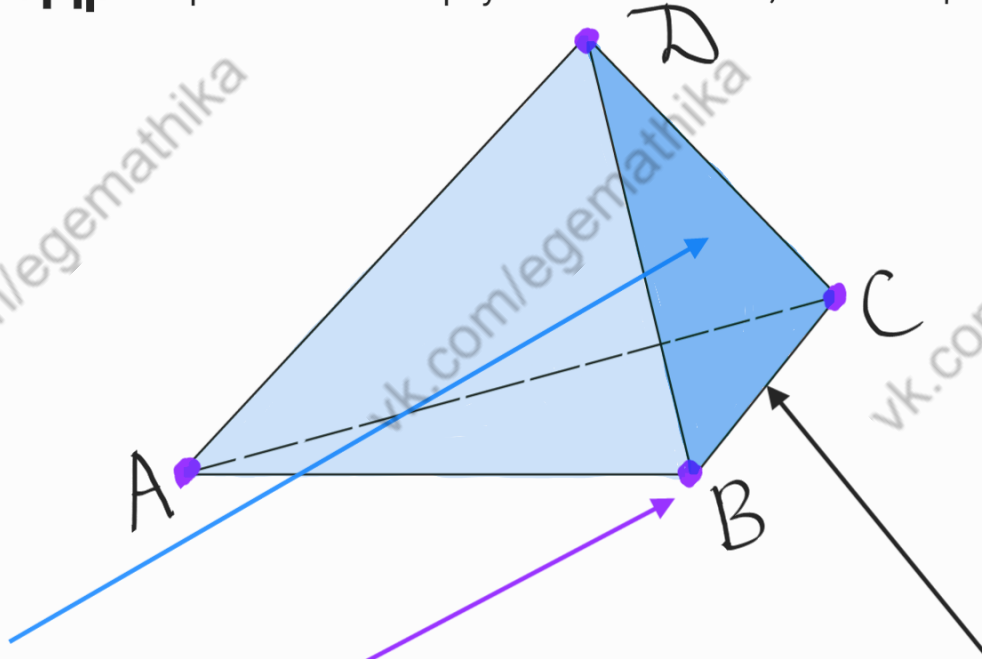
ABCDE - фигура, составленная из отрезков



Часть плоскости, ограниченная линией ABCDE

В стереометрии пользуемся вторым толкованием.

Тетраэдр: произвольный треугольник ABC и D, не лежащая в плоскости ABC



4 грани

4 вершины

6 рёбер

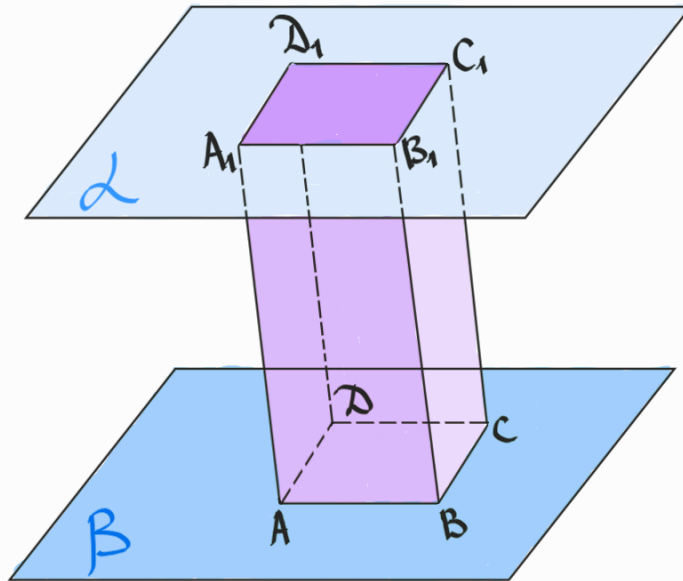
Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными**.

Можно выделить одну из граней - **основание**, тогда три другие - **боковые грани**.

Тетраэдр и параллелепипед.

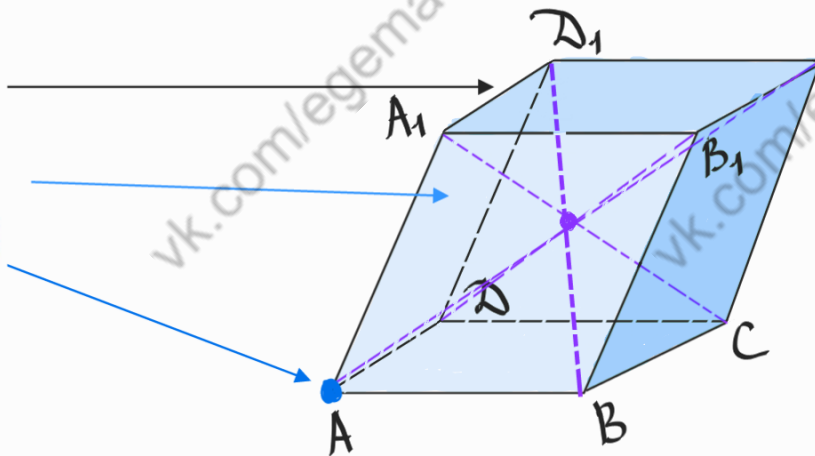
Параллелепипед:

$\alpha \parallel \beta$



Параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 параллельны.

12 рёбер
6 граней
8 вершин



Грани, имеющие общее ребро - **смежные**, а не имеющие - **противоположные**.

Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются **противоположными**. **Диагональ** - отрезок, соединяющий противоположные вершины.

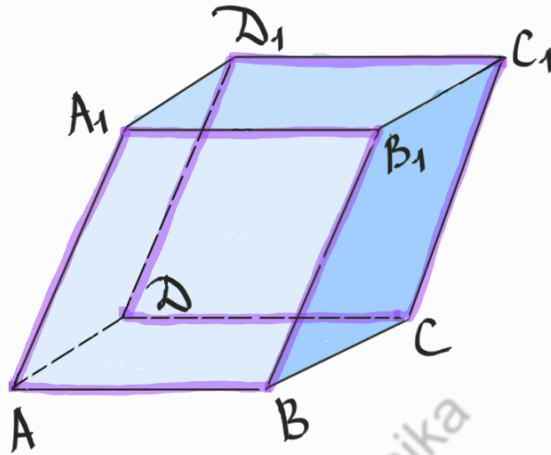
Можно выделить две противоположные грани - **основания**, тогда остальные грани - **боковые**.

Боковые рёбра - рёбра, не принадлежащие основаниям.

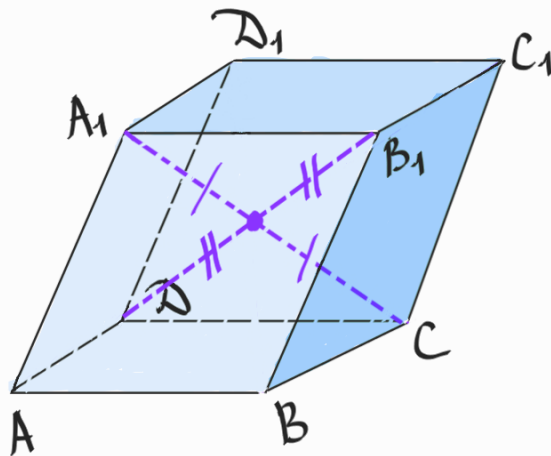
Тетраэдр и параллелепипед.

Свойства параллелепипеда.

- Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.



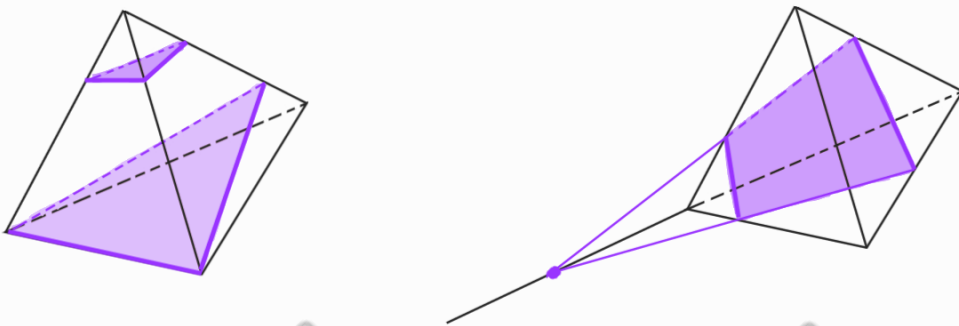
- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.



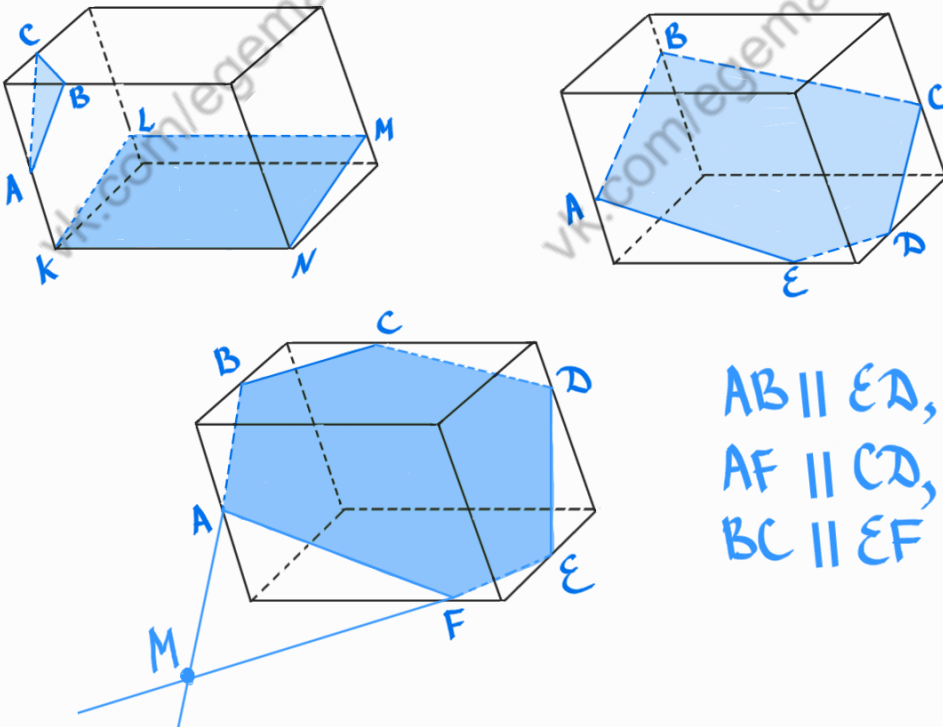
Тетраэдр и параллелепипед.

Секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда) - любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда), пересекает грани по отрезкам, которые образуют многоугольник, **сечение**.

Сечение тетраэдра.



Сечение параллелепипеда.

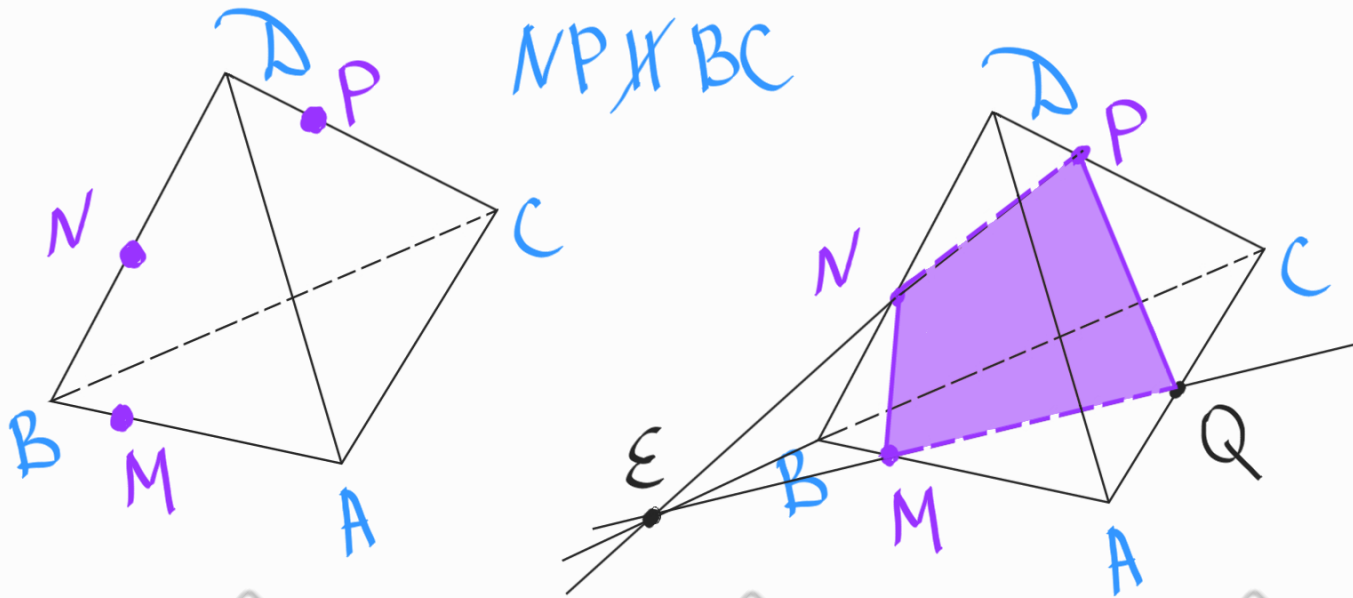


Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника, после чего остаётся провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

Тетраэдр и параллелепипед.

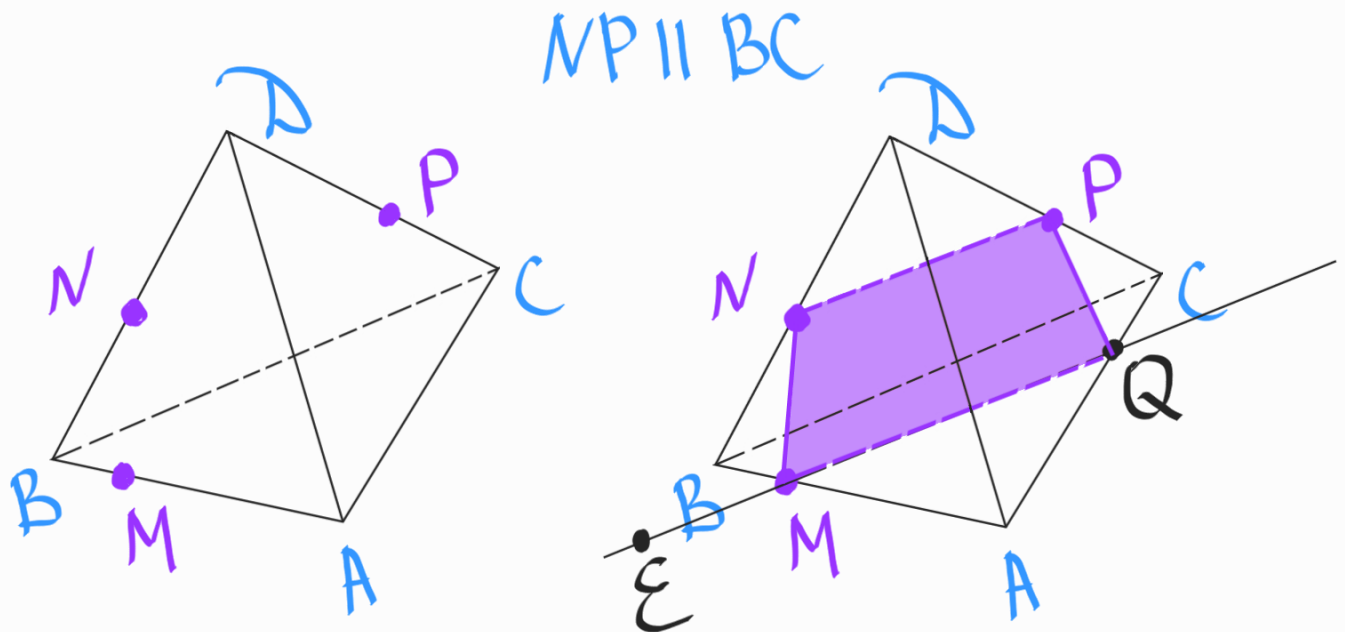
Задача 1.

а)



Е - пересечение NP и BC ,
 Q - пересечение EM и AC

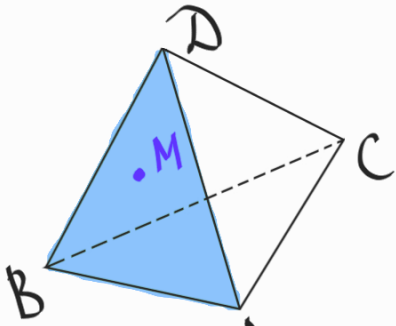
б)



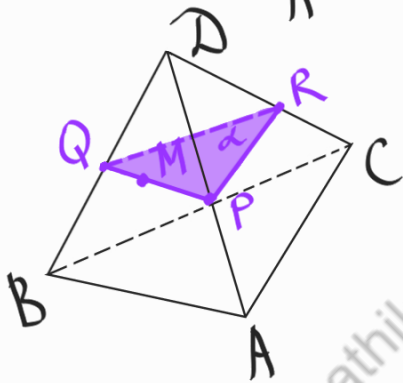
EM параллельна BC ,
 Q - пересечение EM и AC

Тетраэдр и параллелепипед.

Задача 2.

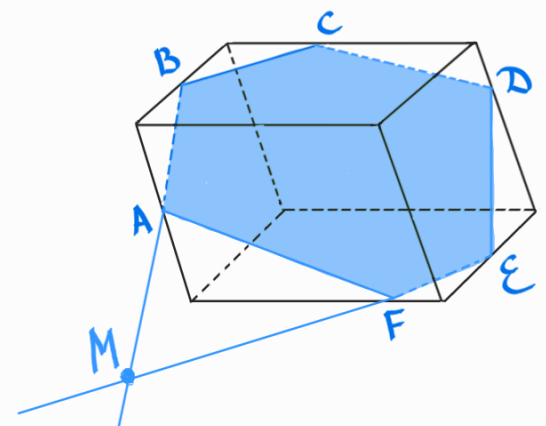
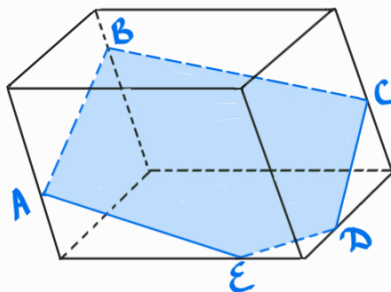
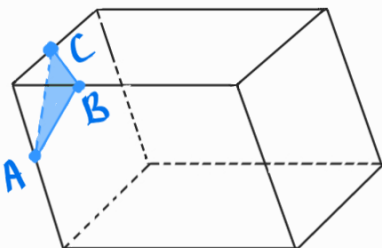
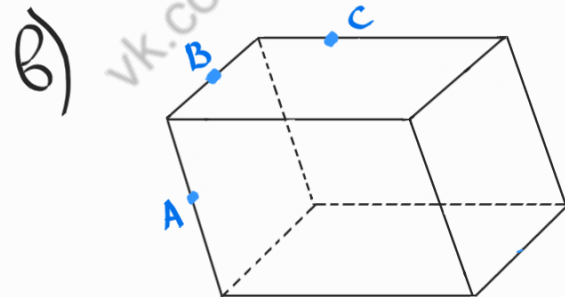
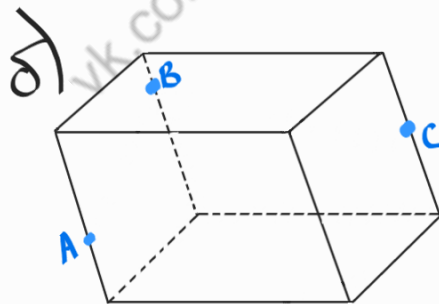
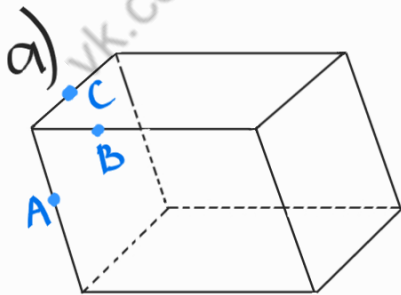


$M \in ADB,$
 $M \in \alpha,$
 $\alpha \parallel ABC$



$QP \parallel AB,$
 $PR \parallel AC,$
 $QR \parallel BC$

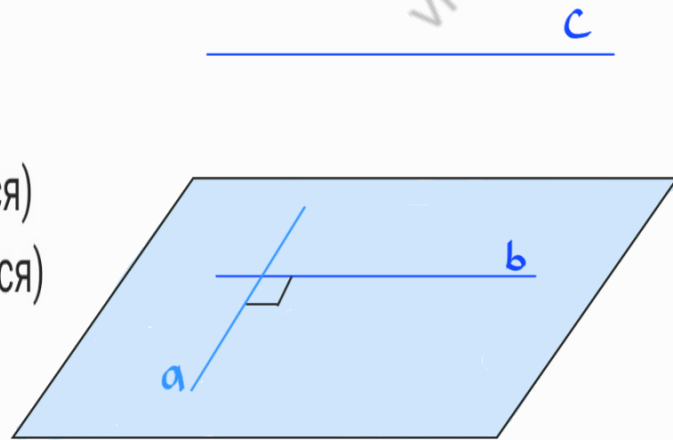
Задача 3.



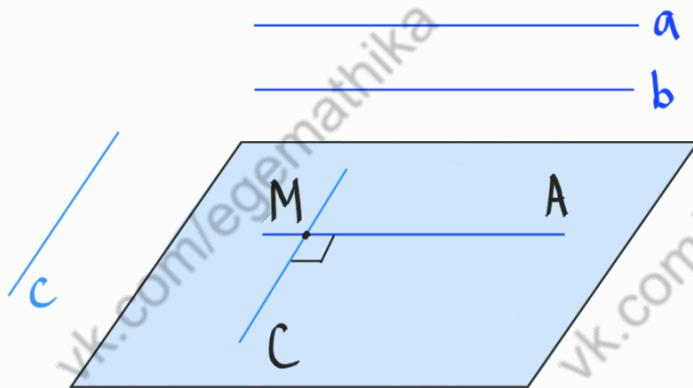
Перпендикулярность прямой и плоскости.

$a \perp b$ (пересекающиеся)

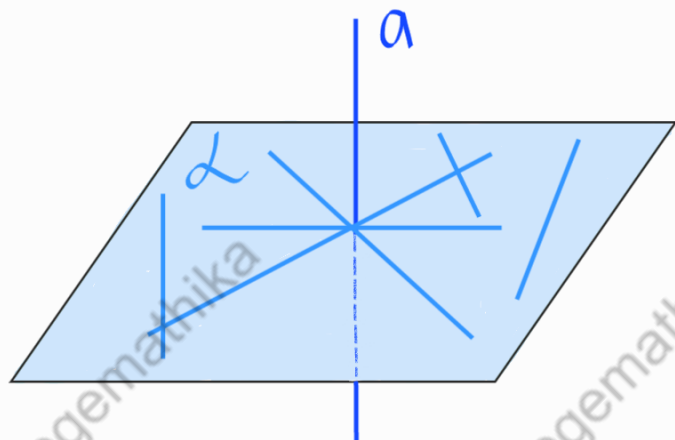
$a \perp c$ (скрещивающиеся)



Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

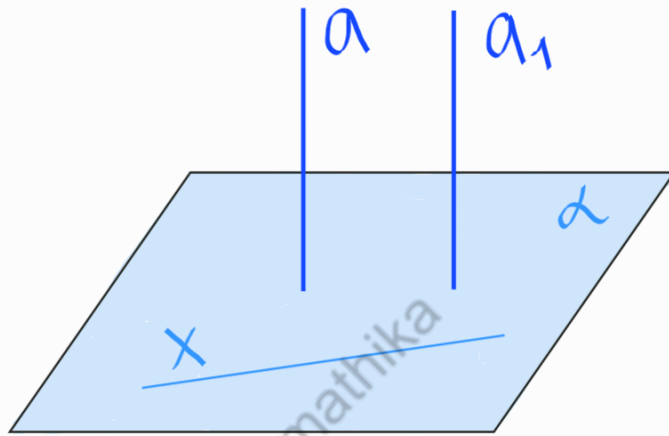


- Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

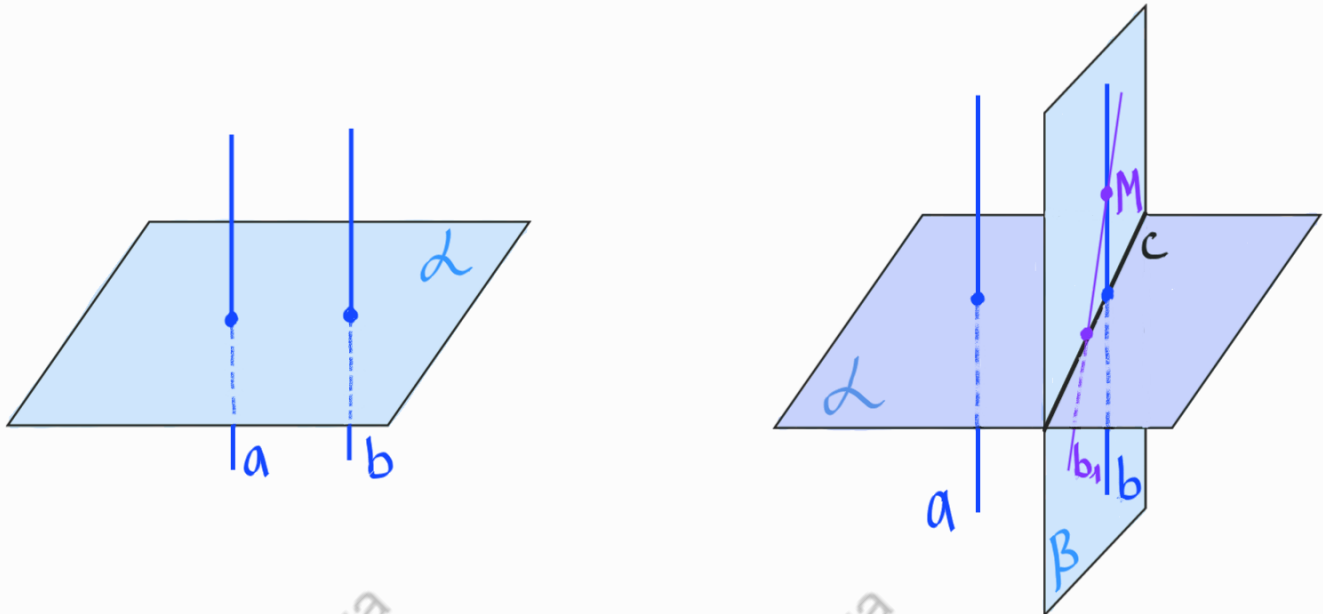


Перпендикулярность прямой и плоскости.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

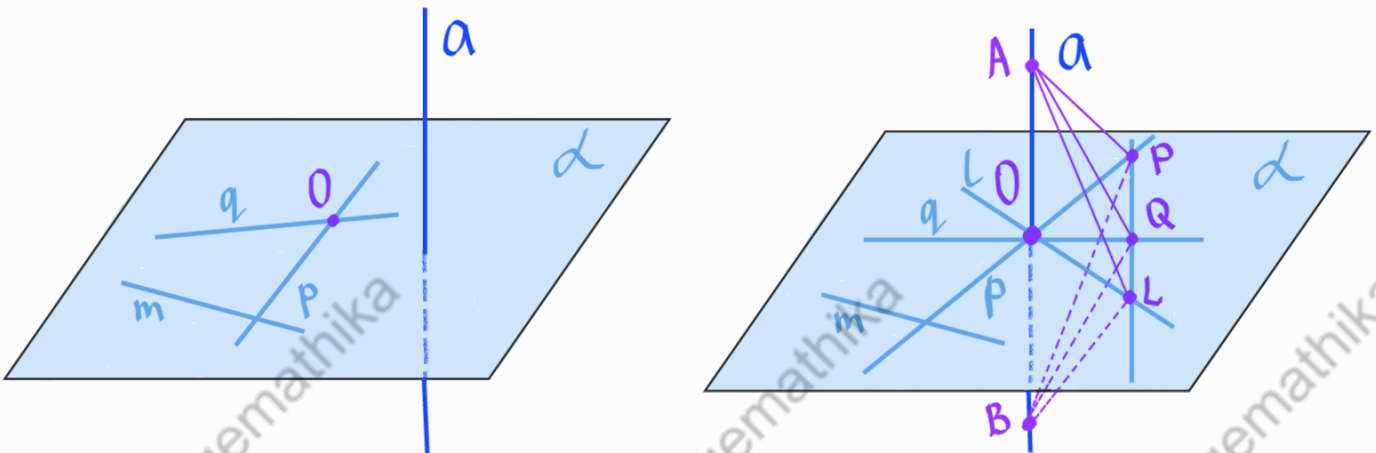


Теорема. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

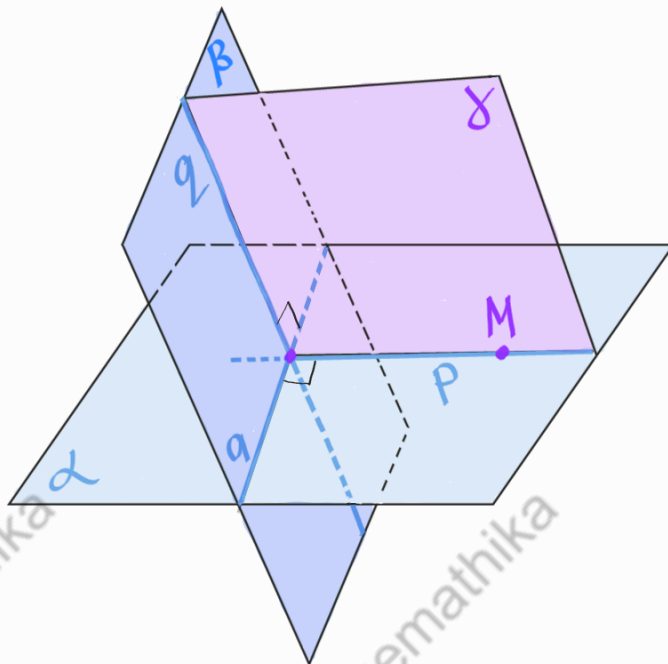


Перпендикулярность прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

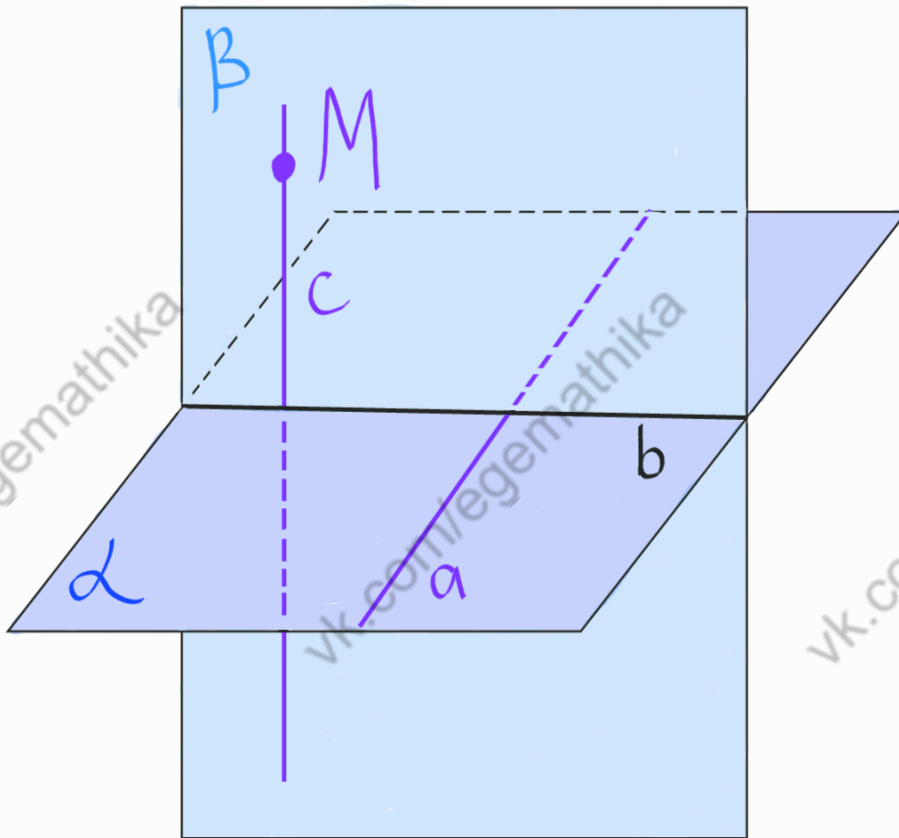


Задача. Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

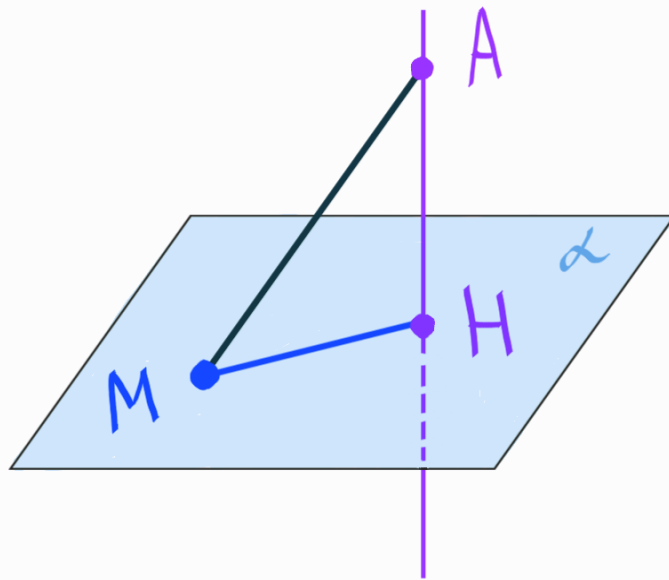


Перпендикулярность прямой и плоскости.

Теорема. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.



AH - перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости α

H - основание перпендикуляра

AM - наклонная, проведённая из точки A к α

M - основание наклонной

HM - проекция наклонной на плоскость α

Перпендикуляр, проведённый из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой плоскости.

Длина перпендикуляра, проведённого из точки A к α

называется **расстоянием от точки A до плоскости** α

Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

- Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями**.

- Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости.

В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**.

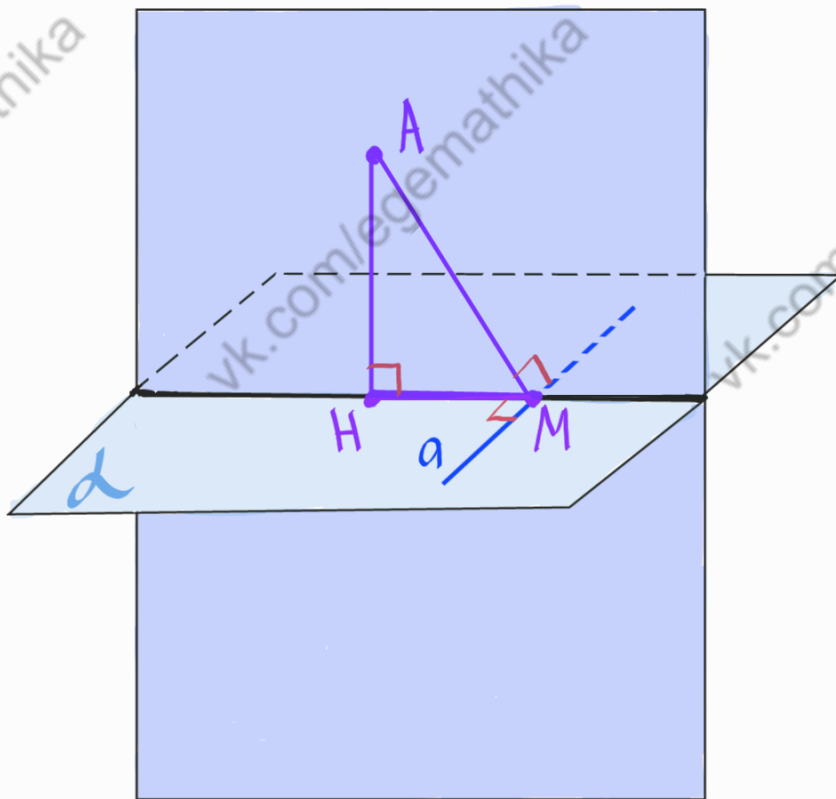
- Если две прямые скрещивающиеся, то через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми**.

Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

Теорема о трёх перпендикулярах.

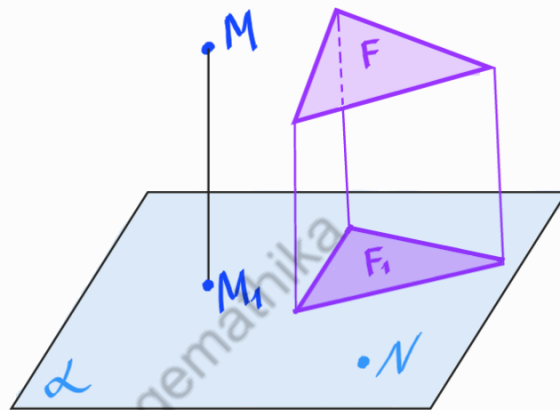
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



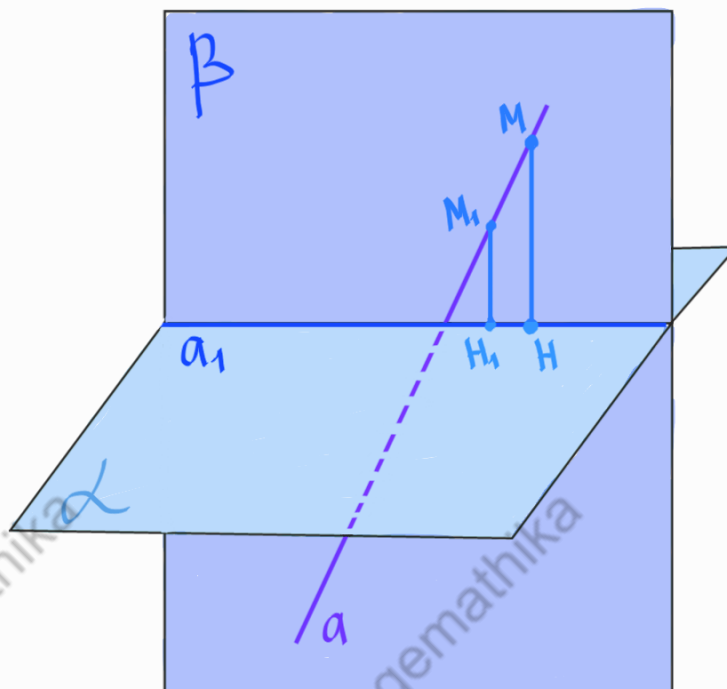
Обратная теорема. Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

- **Проекцией точки на плоскость** называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

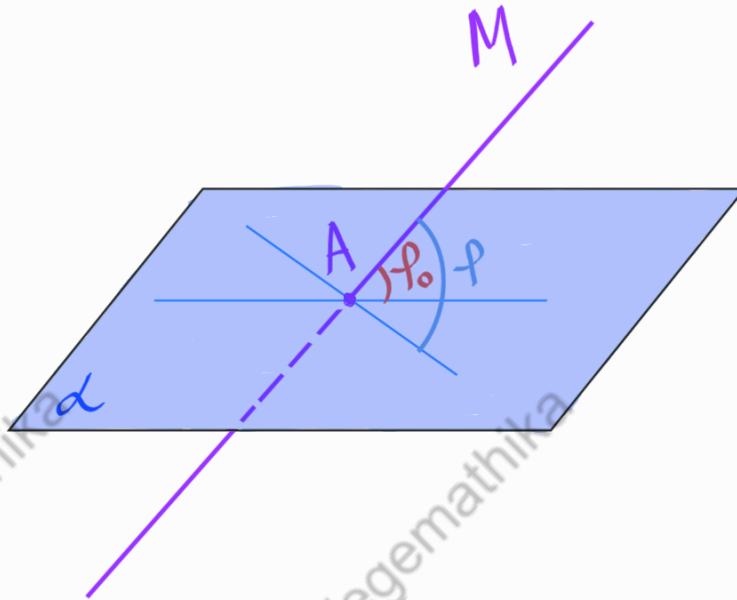


- **Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.**



Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

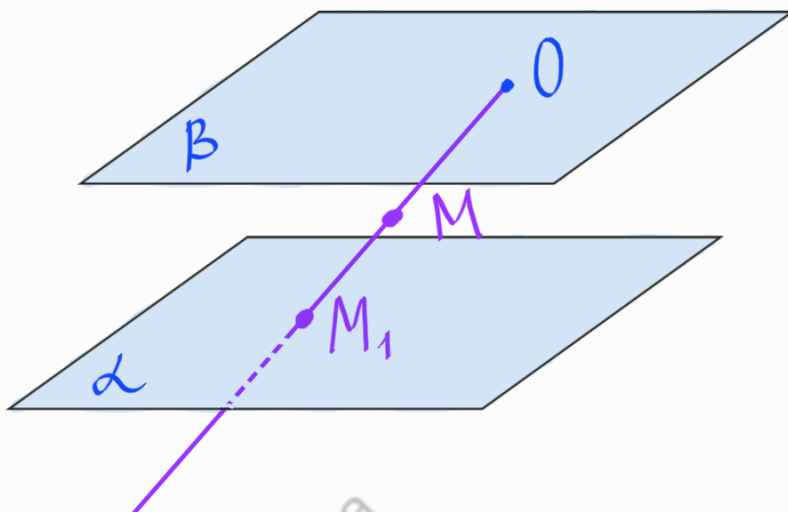
- Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.



Если данная прямая параллельна плоскости, то её проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной.

Рассматривалась прямоугольная проекция.

Центральная проекция:

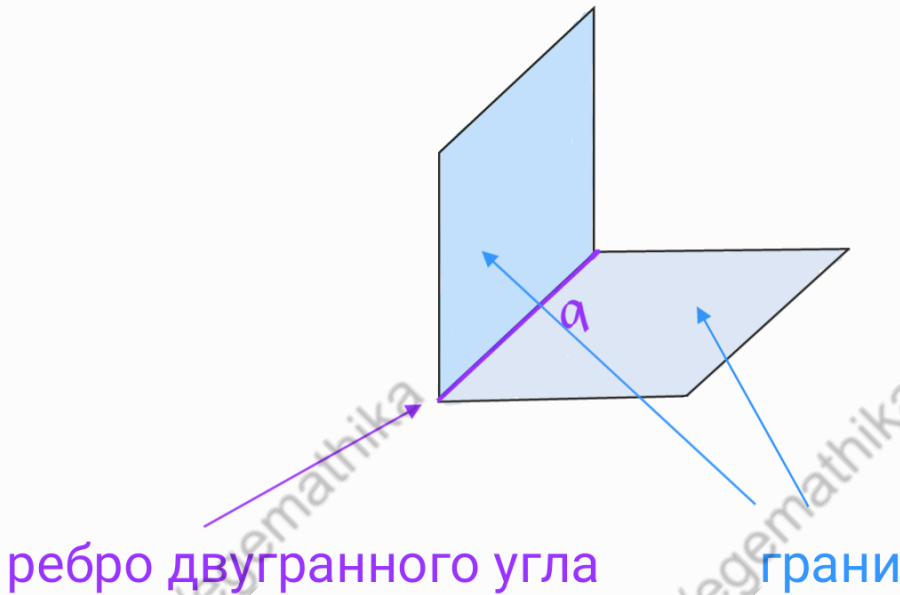


$O \in \beta$
 $\beta \parallel \alpha$

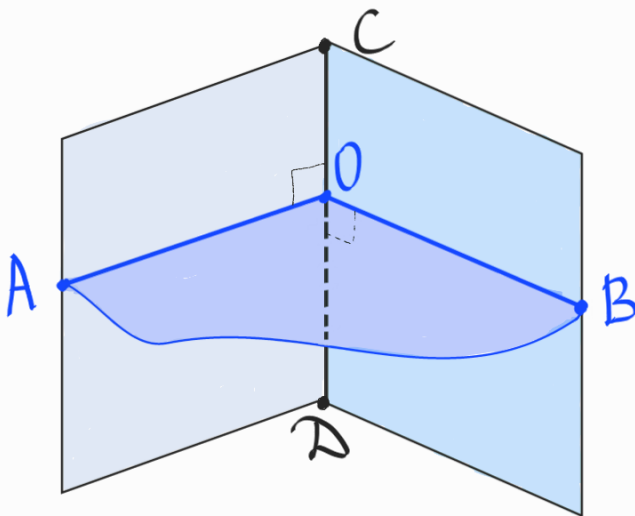
Центральной проекцией (с центром O) точки M , не лежащей в плоскости β на плоскость α называется точка M_1 пересечения прямой OM с плоскостью α .

Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

- Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости.



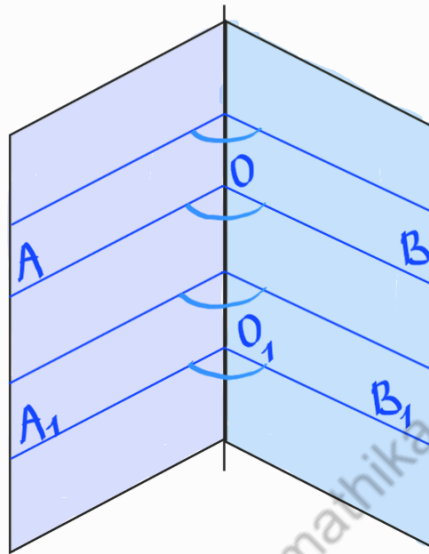
Линейный угол двугранного угла:



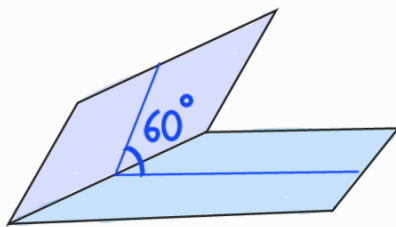
Угол AOB - линейный угол двугранного угла с ребром CD

Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

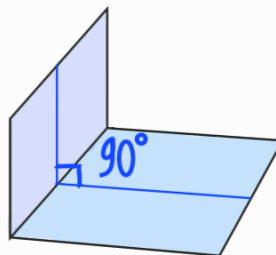
- Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.



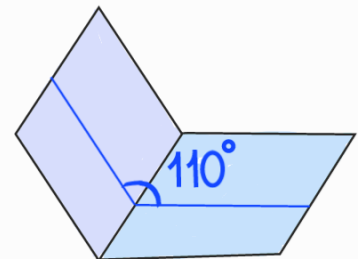
- Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.



Острый

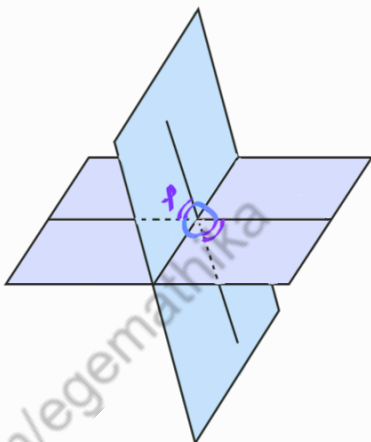


Прямой



Тупой

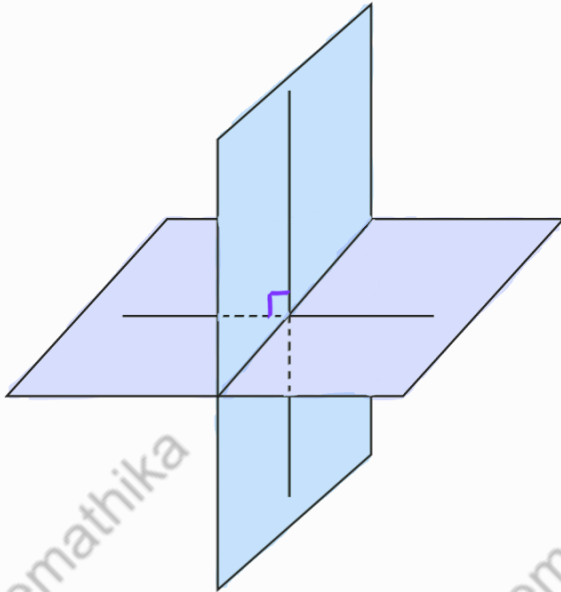
Угол между пересекающимися плоскостями φ :



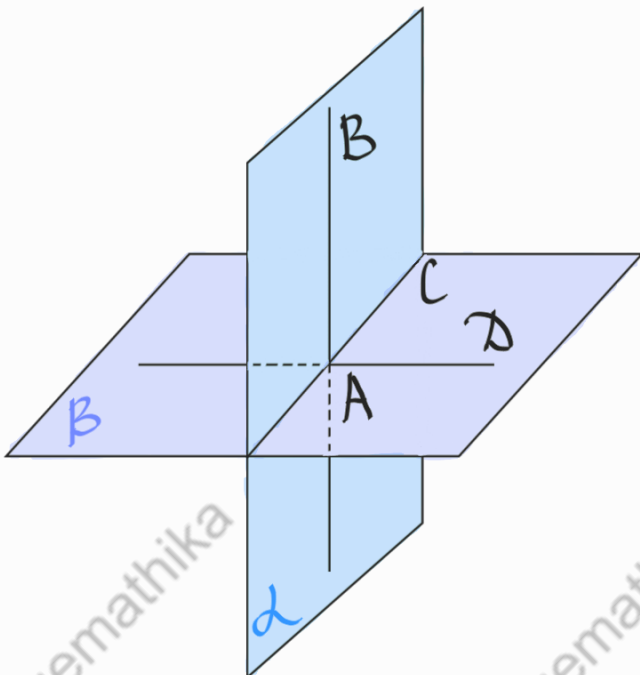
$$0 < \varphi \leq 90^\circ$$

Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

- Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

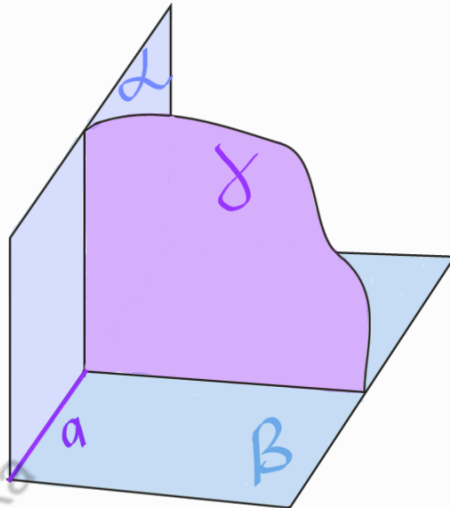


Теорема. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.



Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

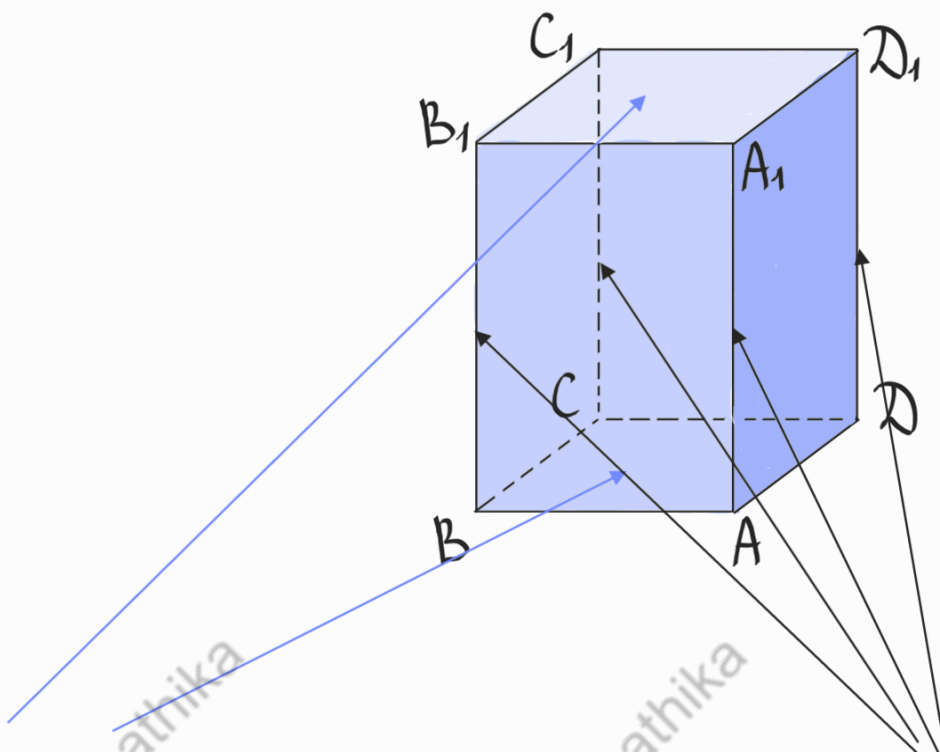
- *Следствие.* Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.



$$\gamma \perp a \Rightarrow$$

$$\gamma \perp \alpha, \gamma \perp \beta$$

- Параллелепипед называется **прямоугольным**, если его боковые рёбра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



Основания

Боковые рёбра
перпендикулярны основаниям

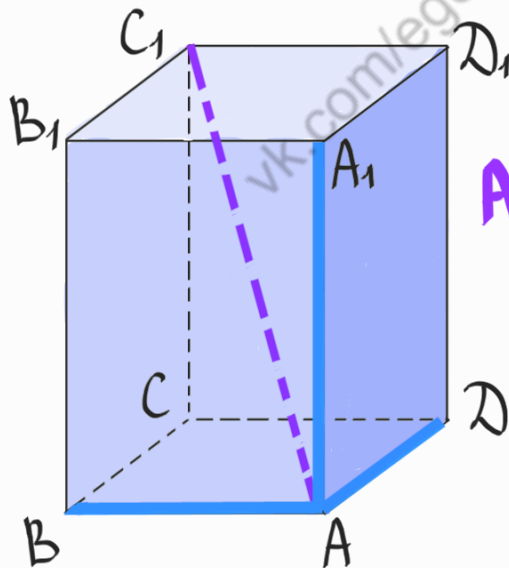
Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

- В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней - прямоугольники.
- Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда - прямые.

Длины трёх рёбер, имеющих общую вершину, назовём **измерениями** прямоугольного параллелепипеда.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.



$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

- *Следствие.* Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется **кубом**.

Все грани куба - равные друг другу квадраты.

Понятие многогранника. Призма.

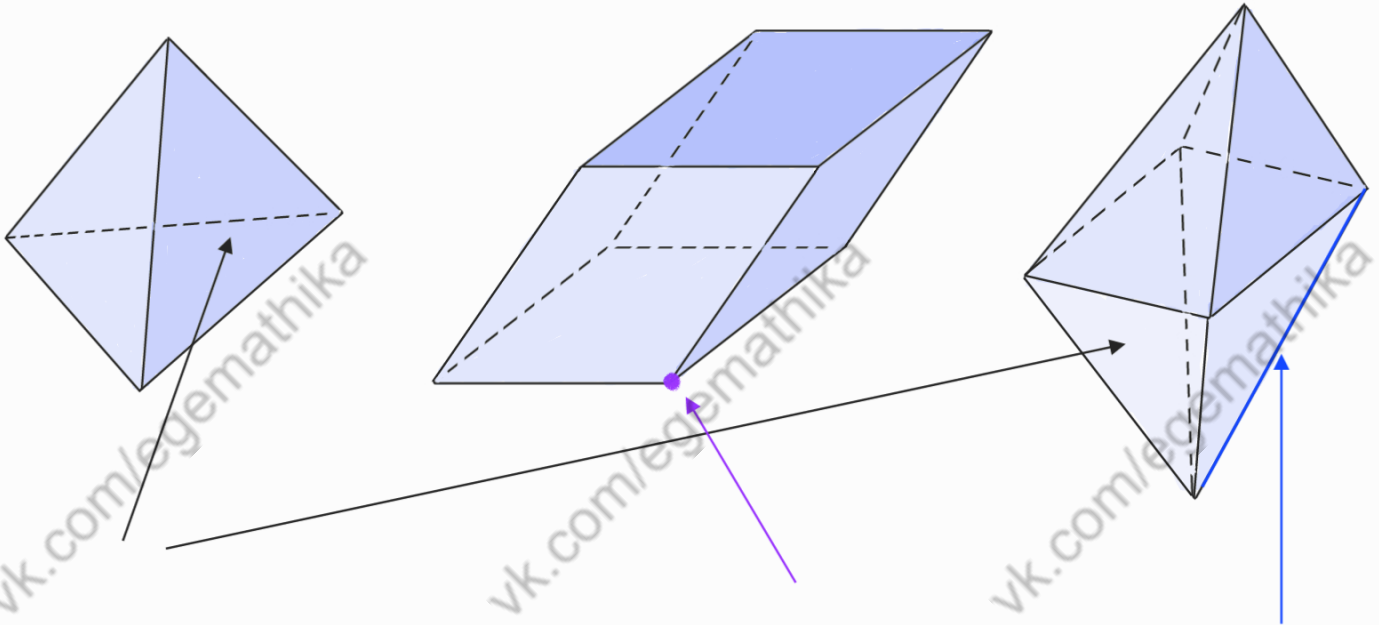
- Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело, называется **многогранником**.

Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.

Тетраэдр

Параллелепипед

Октаэдр

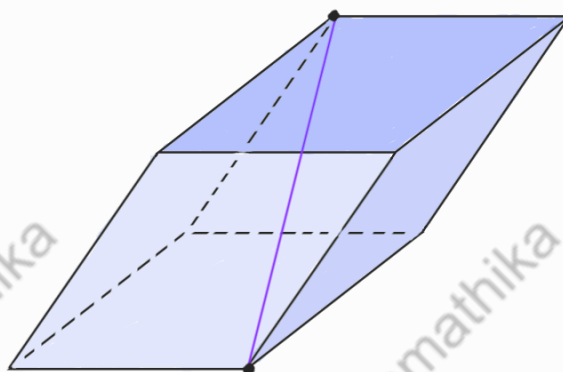


Грани - треугольники

Вершины

Рёбра

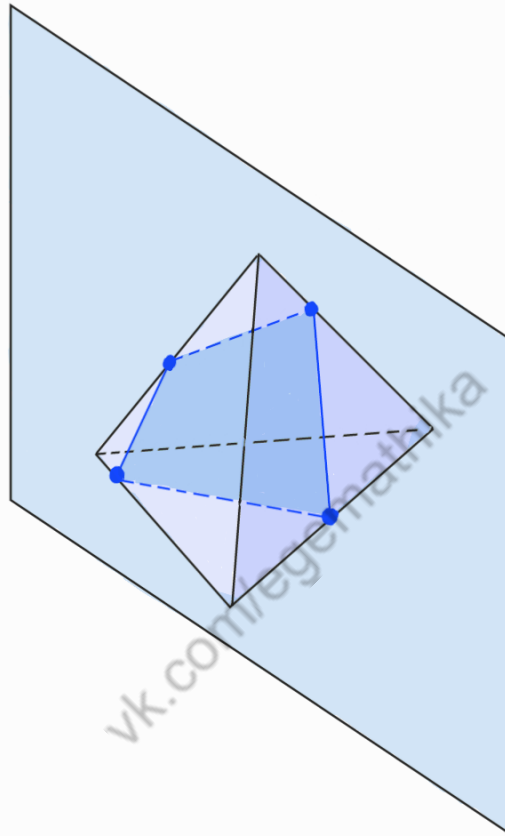
Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.



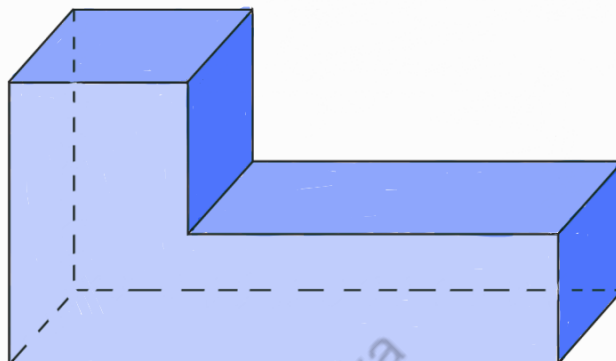
Есть ли диагональ у тетраэдра?

Понятие многогранника. Призма.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется **секущей плоскостью**, а общая часть многогранника и секущей плоскости - **сечением**.



Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

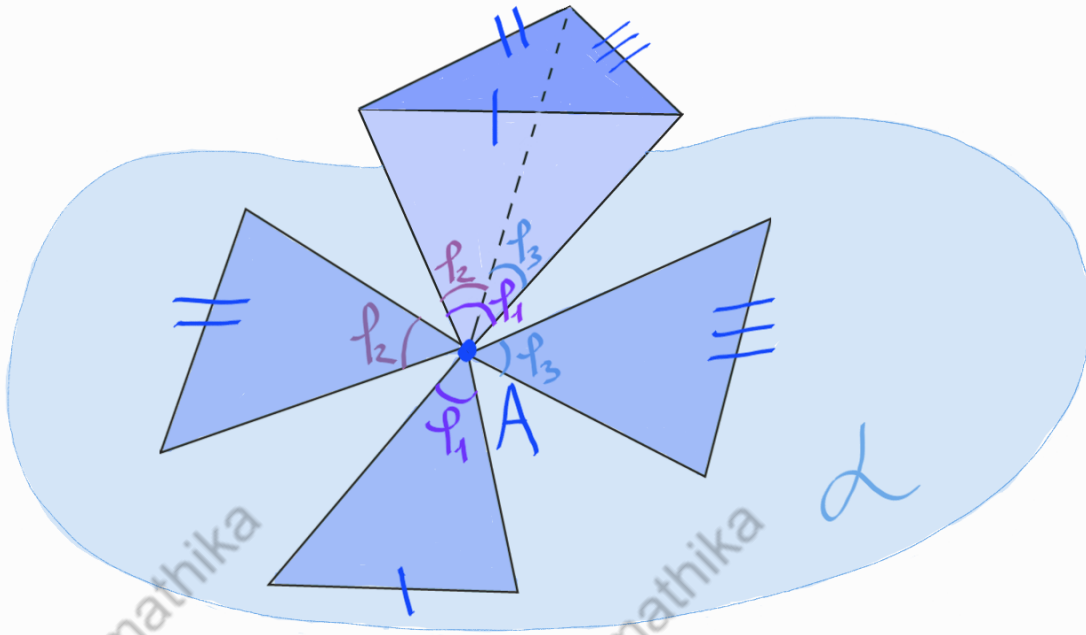


Невыпуклый многогранник

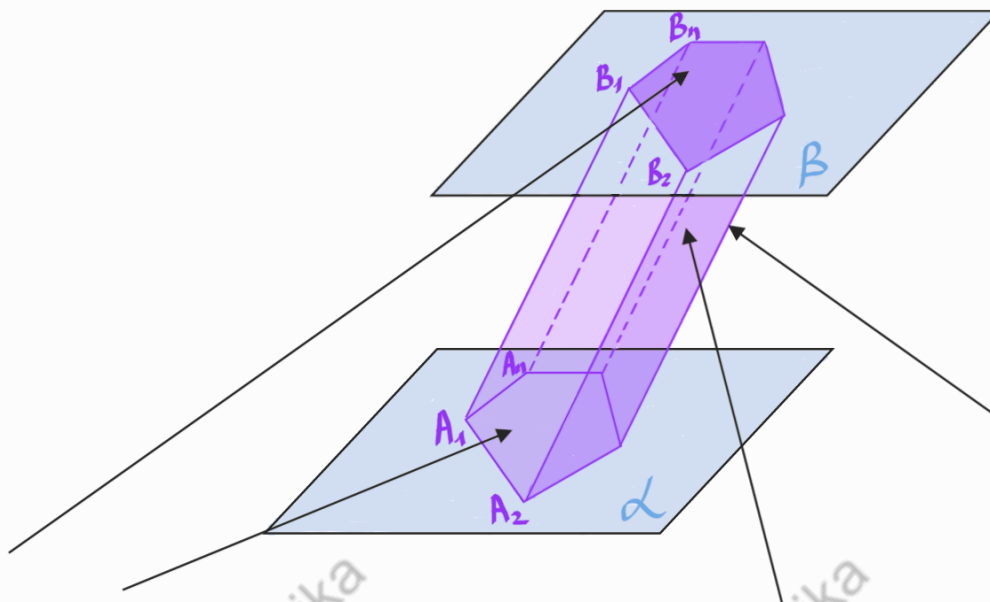
Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

Понятие многогранника. Призма.

- В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360° .



- Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов называется **призмой**.

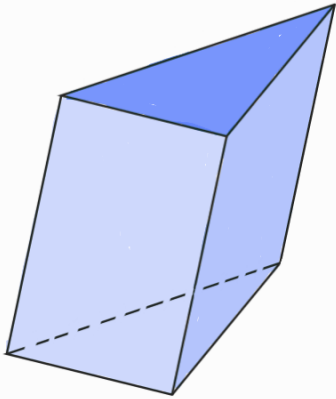


Основания

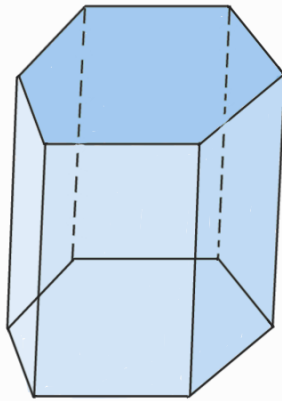
Боковые грани
(параллелограммы)

Боковые рёбра

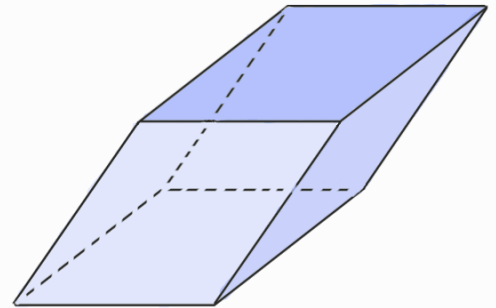
Понятие многогранника. Призма.



Треугольная призма

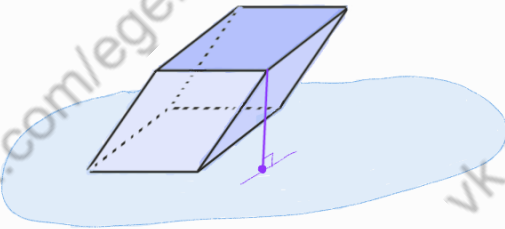


Шестиугольная

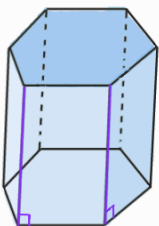


Четырёхугольная
(параллелепипед)

- Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания называется **высотой** призмы.



- Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае - **наклонной**. Высота прямой призмы равна её боковому ребру.

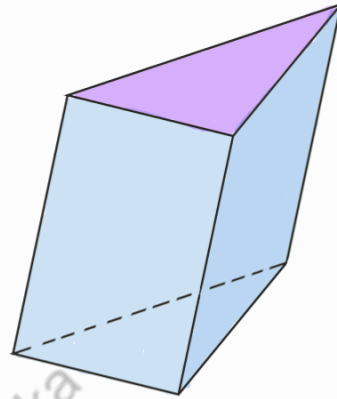


- Прямая призма называется **правильной**, если её основания - правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани - равные прямоугольники.

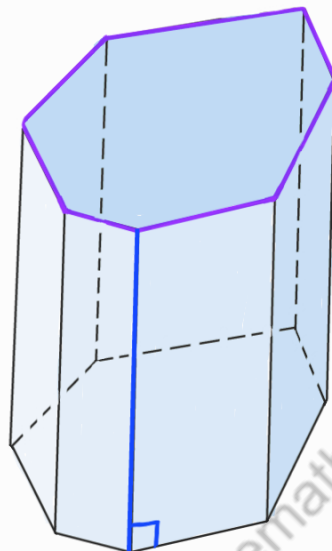
Понятие многогранника. Призма.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней, а **площадью боковой поверхности призмы** - сумма площадей её боковых граней.

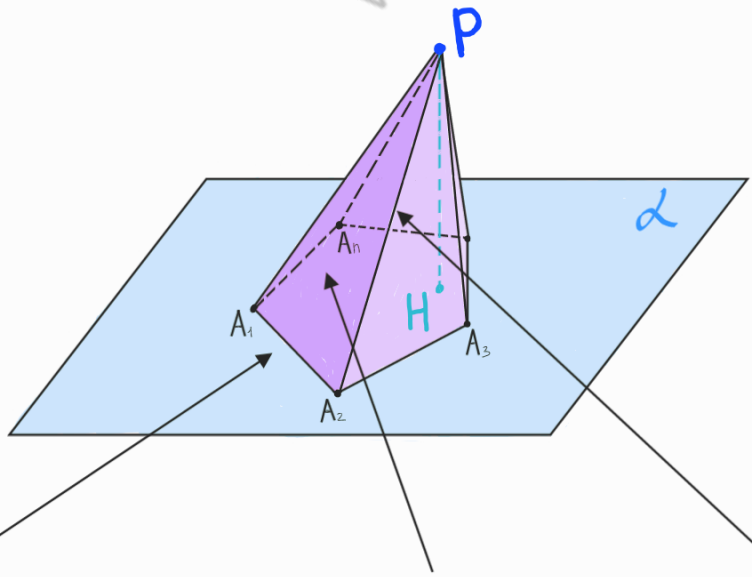
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$



- **Теорема.** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению **периметра основания** на **высоту призмы**.



Пирамида.



$$A_1 A_2 \dots A_n \in \alpha$$

$$P \notin \alpha$$

Основание
($A_1A_2\dots A_n$)

Боковые грани

Боковые рёбра

P - вершина пирамиды

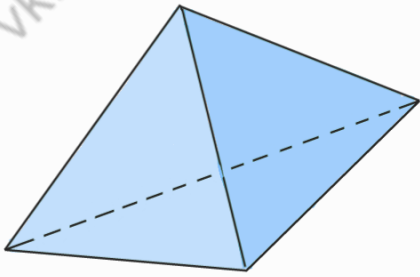
PH - высота пирамиды (перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания)

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т.е. основания и боковых граней)

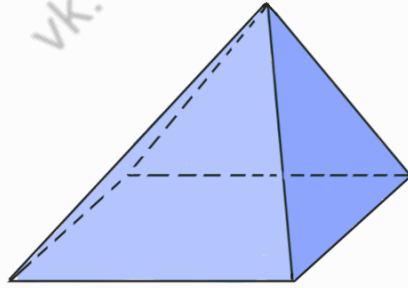
Площадью боковой поверхности пирамиды - сумма площадей её боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

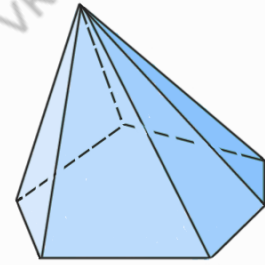
Пирамида.



Треугольная пирамида
(тетраэдр)

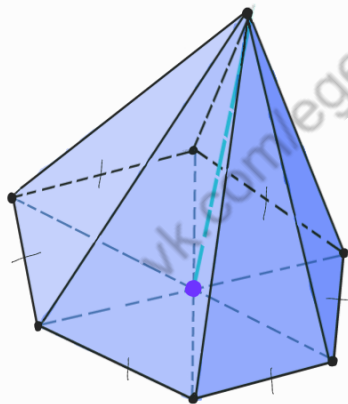


Четырёхугольная

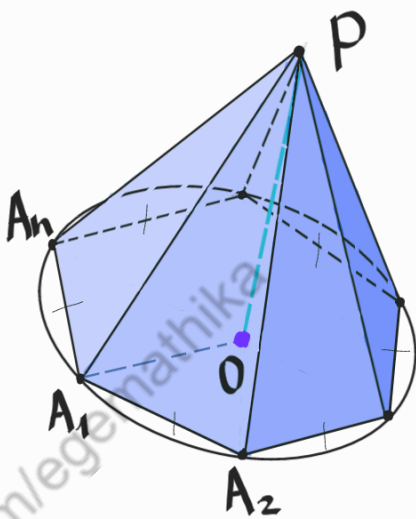


Шестиугольная

Пирамида называется **правильной**, если её основание - правильный многоугольник, а **отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания**, является её высотой.

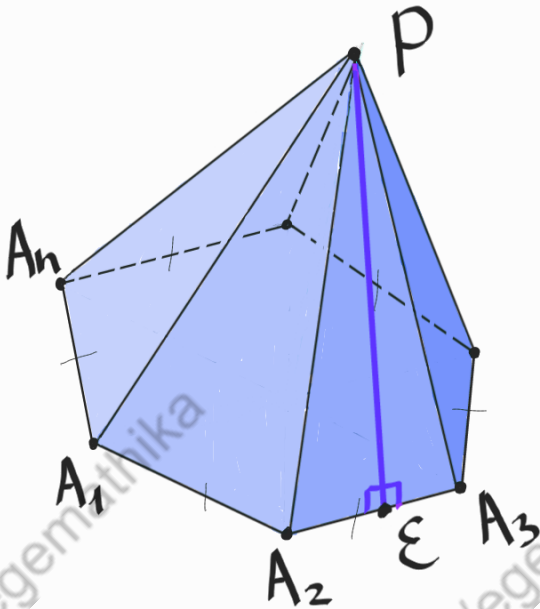


- Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.



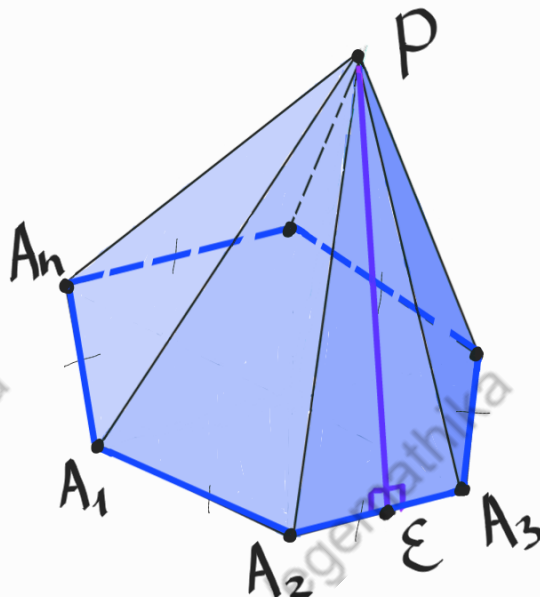
Пирамида.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой**.



Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

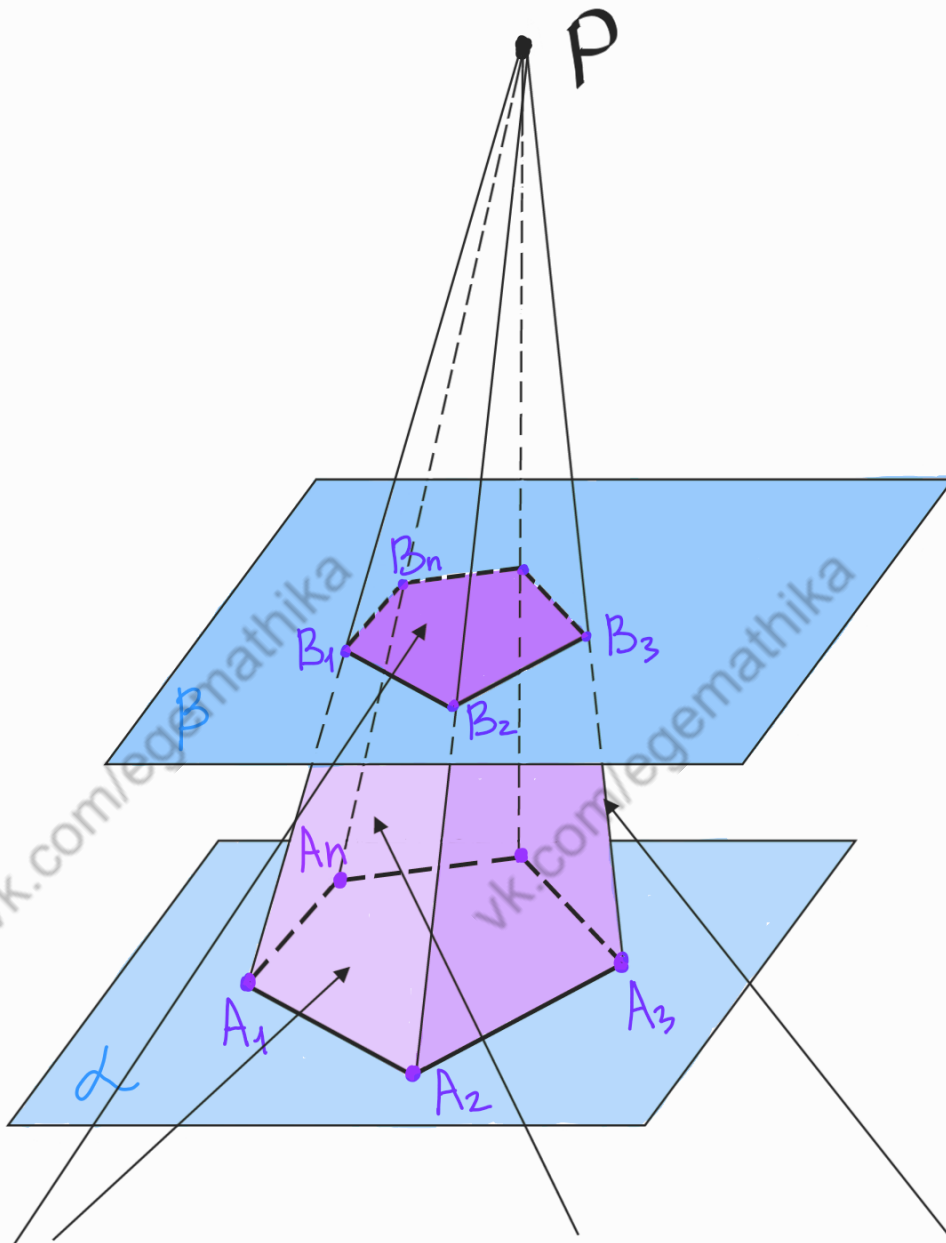
Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения **периметра основания** на **апофему**.



Пирамида.

$PA_1A_2...A_n$ - произвольная пирамида.

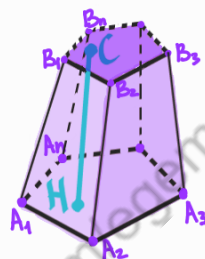
Усечённая пирамида:



$\beta \parallel \alpha$

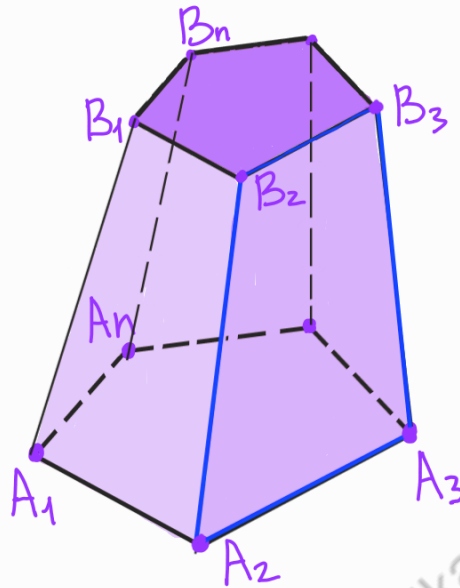
Нижнее и верхнее основания Боковые грани Боковые рёбра

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** усеченной пирамиды.

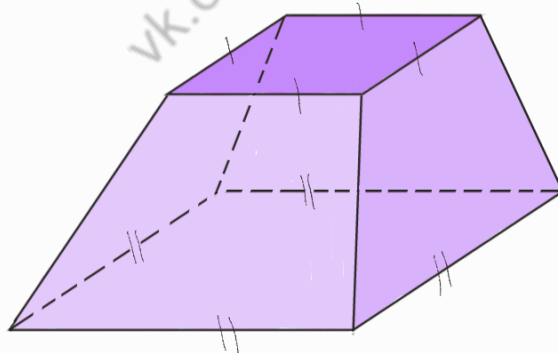


Пирамида.

- Боковые грани усечённой пирамиды - **трапеции**.



- Усечённая пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.



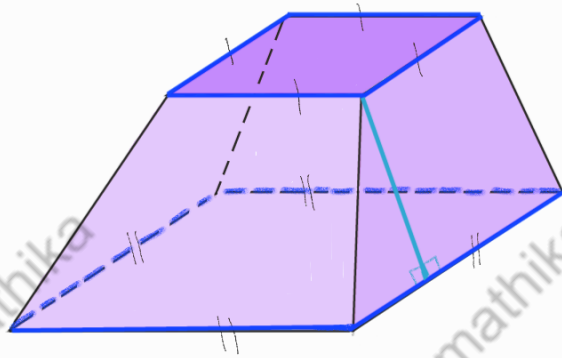
Основания правильной усечённой пирамиды - правильные многоугольники, а боковые грани - равнобедренные трапеции.

Высоты этих трапеций называются **апофемами**.

Площадью боковой поверхности усечённой пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

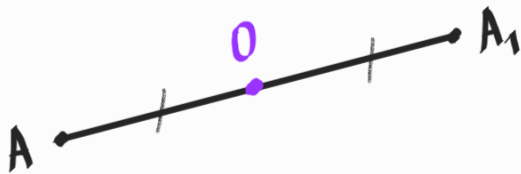
Пирамида.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

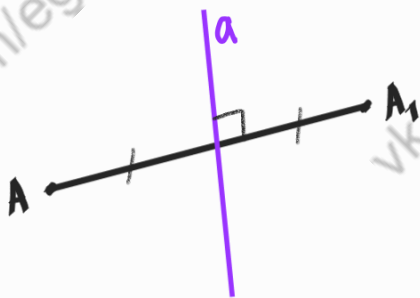


Правильные многогранники.

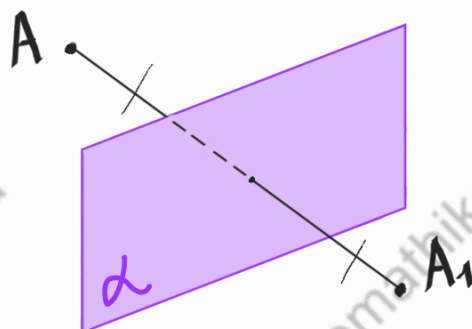
- Точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки O (центр симметрии)**, если O - середина отрезка AA_1 . Точка O считается симметричной самой себе.



- Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой a (ось симметрии)**, если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

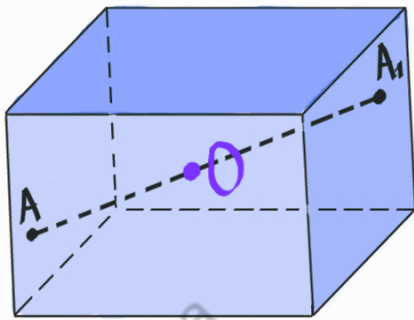


- Точки A и A_1 называются **симметричными относительно плоскости α (плоскость симметрии)**, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе.

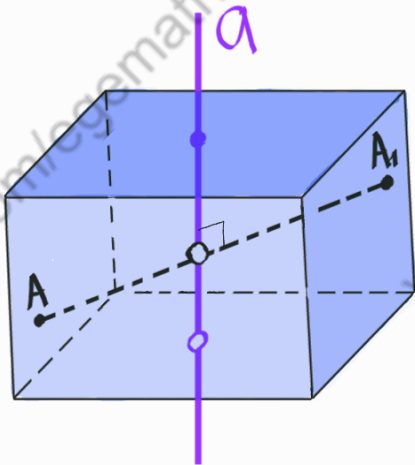


Правильные многогранники.

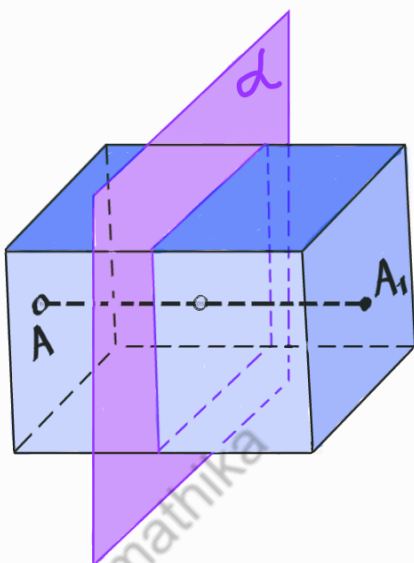
Точка (прямая, плоскость) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно неё некоторой точке той же фигуры. Говорят, что такая фигура обладает центральной (осевой, зеркальной) симметрией.



Центральная симметрия (O - центр симметрии)



Осевая симметрия (a - ось симметрии)

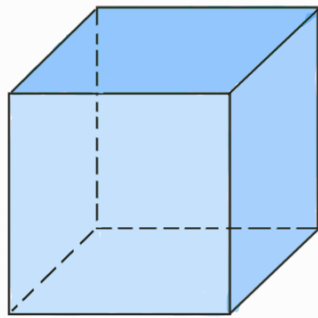


Зеркальная симметрия (α - плоскость симметрии)

Сколько центров и осей симметрии имеют прямая и плоскость?

Правильные многогранники.

- Выпуклый многогранник называется **правильным**, если все его грани - равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер.



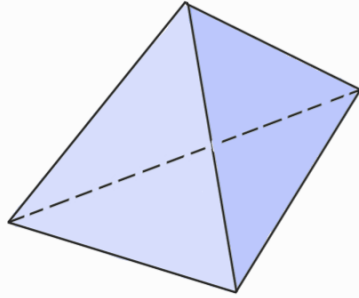
Все грани куба - равные квадраты, и к каждой вершине сходятся три ребра.

- Все рёбра правильного многогранника равны и все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром равны.
- Не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n -угольники при $n \geq 6$.

Каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трёх, четырёх или пяти равносторонних треугольников, либо трёх квадратов, либо трёх правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

Правильные многогранники.

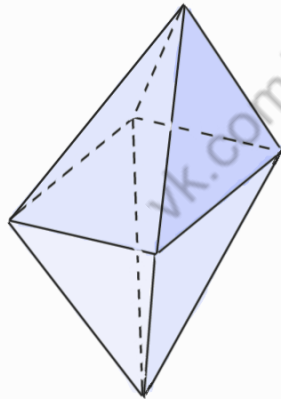
Правильный тетраэдр



Составлен из четырёх равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трёх треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине 180° .

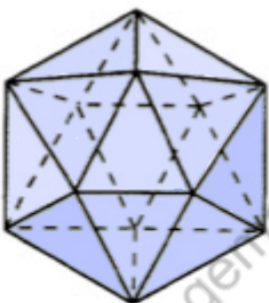
Отличие от правильной треугольной пирамиды?

Правильный октаэдр



Составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной четырёх треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине 240° .

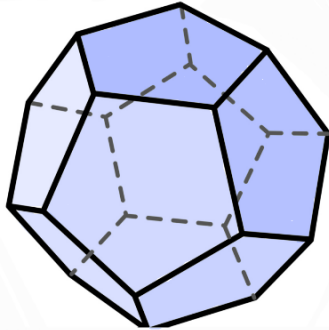
Правильный икосаэдр



Составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине 300° .

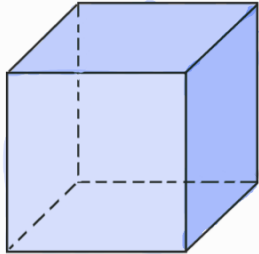
Правильные многогранники.

Правильный додекаэдр



Составлен из двенадцати равносторонних пятиугольников. Каждая его вершина является вершиной трёх правильных пятиугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине 324° .

Куб



Составлен из шести квадратов. Каждая его вершина является вершиной трёх квадратов. Сумма плоских углов при каждой вершине 270° .

- Число граней f , рёбер k и вершин e каждого из правильных многогранников можно найти с помощью формулы Эйлера: $f+e-k=2$.

n - число рёбер каждой грани,

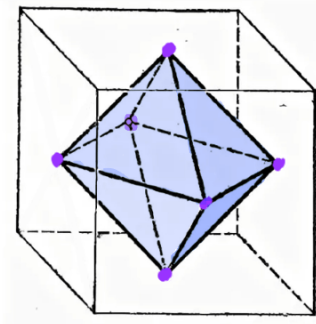
m - число рёбер, сходящихся к каждой вершине,

$$nf=2k$$

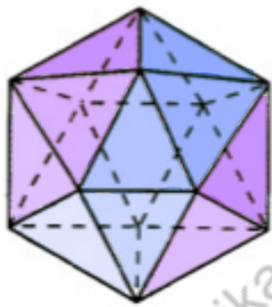
$$me=2k$$

Посчитайте f , k , e у правильных многогранников.

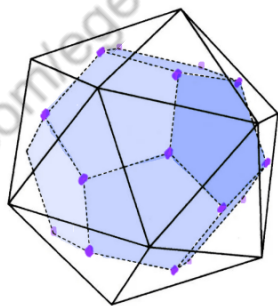
Правильные многогранники.



Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра.

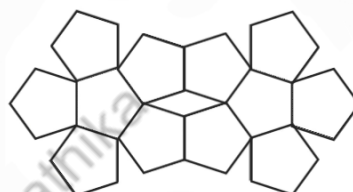
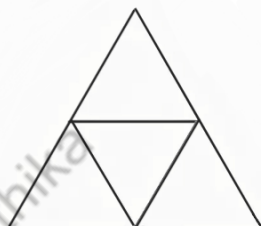
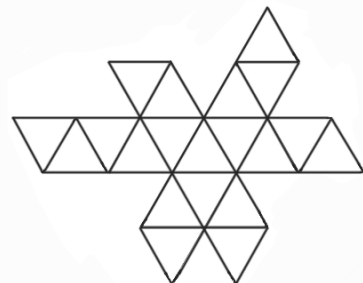
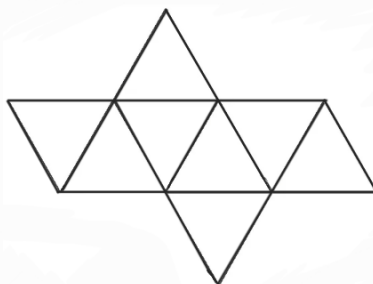
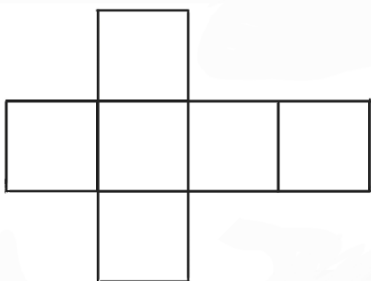


Правильный икосаэдр составлен из двух правильных пятиугольных пирамид и многогранника, отдалённо напоминающего пятиугольную призму.



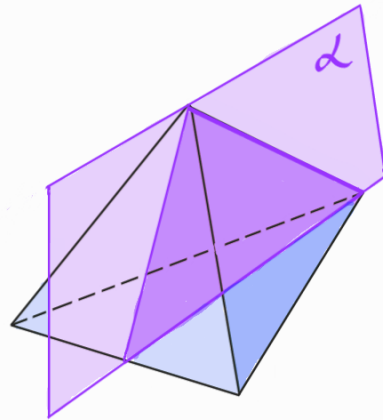
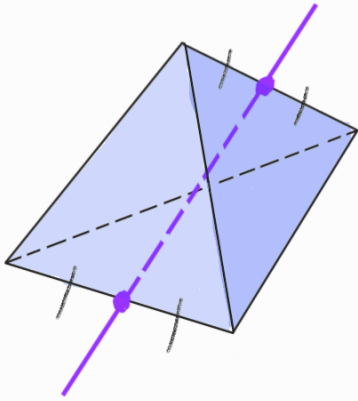
Центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра.

Развёртки:

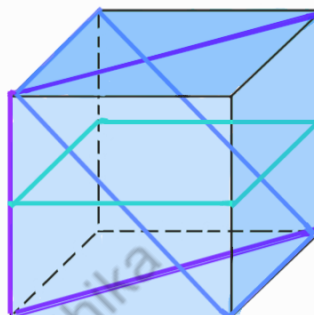
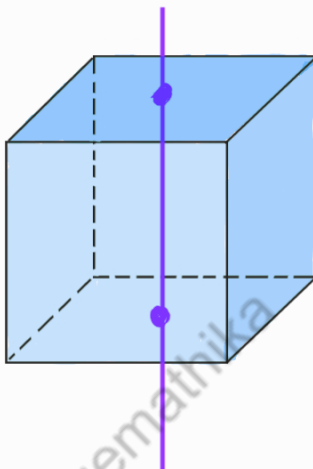
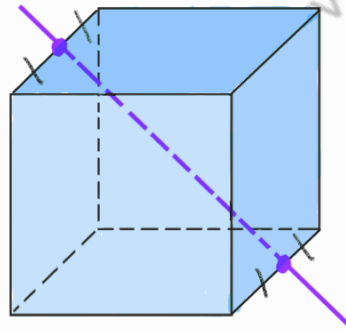
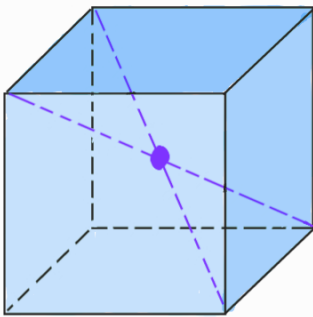


Правильные многогранники.

- Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии. Имеет три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии.



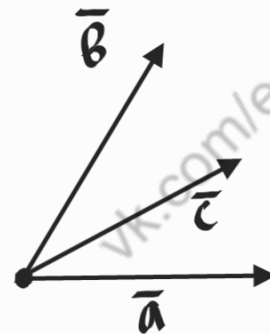
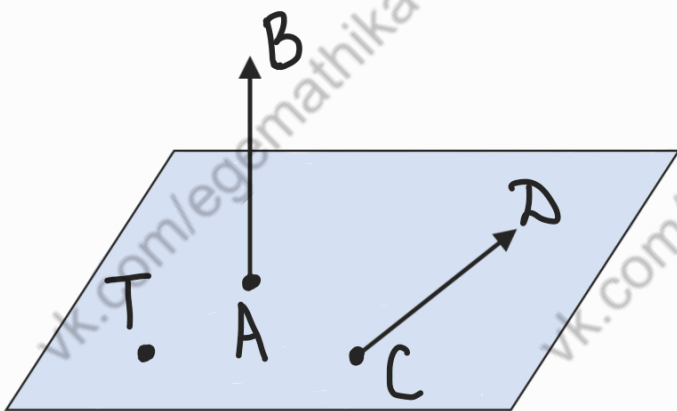
- Куб имеет один центр симметрии - точку пересечения его диагоналей, девять осей симметрии, девять плоскостей симметрии.



Понятие вектора в пространстве.

- Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется **вектором**.

Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**. Начало и конец нулевого вектора совпадают, не имеет направления.



- **Длиной ненулевого вектора $\vec{AB}$** называется длина отрезка AB . Длина вектора $\vec{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\vec{AB}|$ ($|\vec{a}|$).

Длина нулевого вектора считается равной нулю:
 $|\vec{0}|=0$.

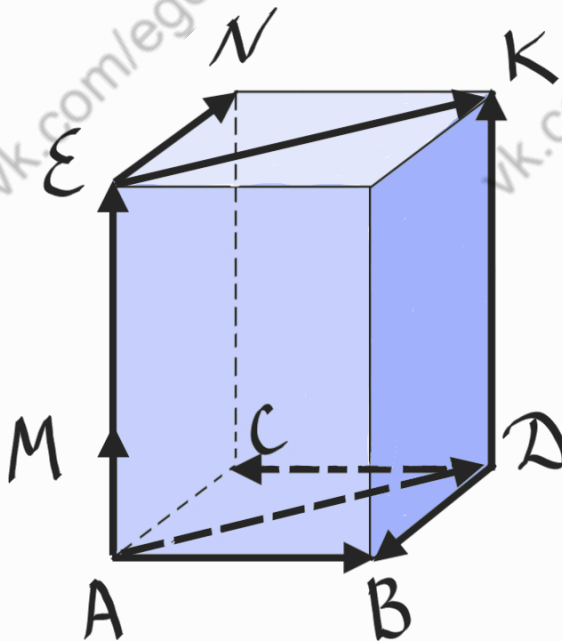
Понятие вектора в пространстве.

- Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
- Если два ненулевых вектора $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то **противоположно направленными**.

Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором.

Запись $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ обозначает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.

Запись $\vec{c} \uparrow \vec{d}$ обозначает, что $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены.

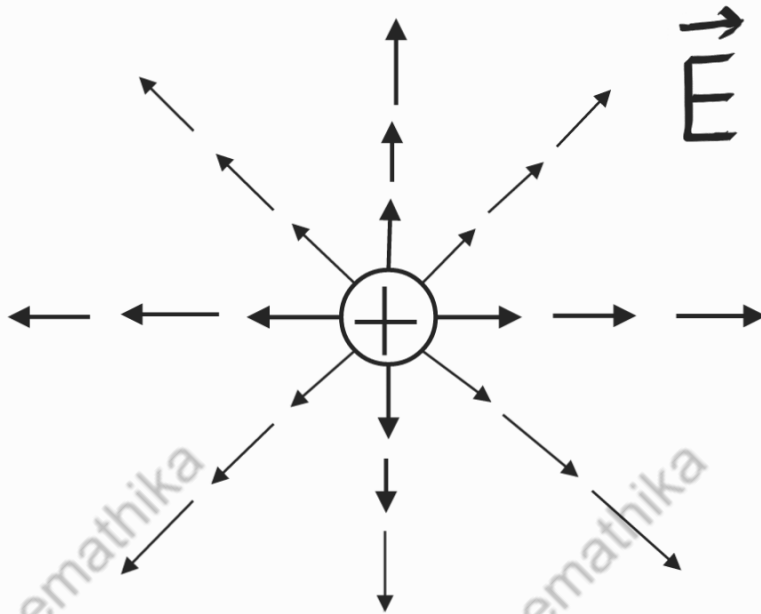


$$\vec{AM} \uparrow \vec{DK}, \vec{AD} \uparrow \vec{EC}, \vec{AB} \uparrow \vec{DC}.$$

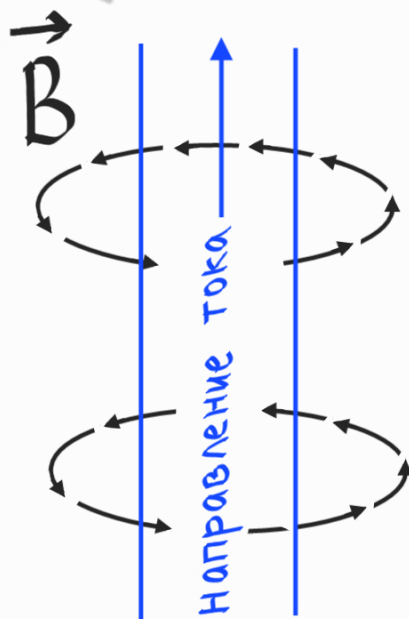
Векторы $\vec{AD}$ и $\vec{AM}$ не являются ни сонаправленными, ни противоположно направленными, т.к. они не коллинеарны.

Понятие вектора в пространстве.

Многие физические величины являются векторными величинами.



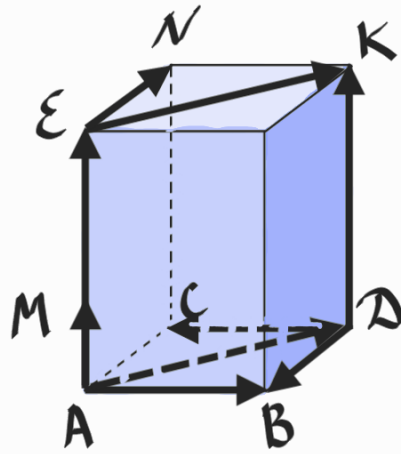
Векторы напряжённости электрического поля положительного точечного заряда.



Векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника с током.

Понятие вектора в пространстве.

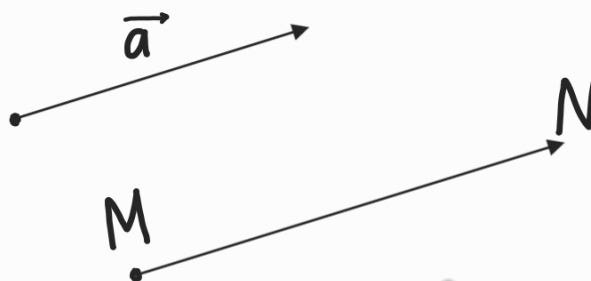
- Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.



$$\vec{AE} = \vec{DK}, \text{ т.к. } \vec{AE} \uparrow \uparrow \vec{DK} \text{ и } |\vec{AE}| = |\vec{DK}|$$

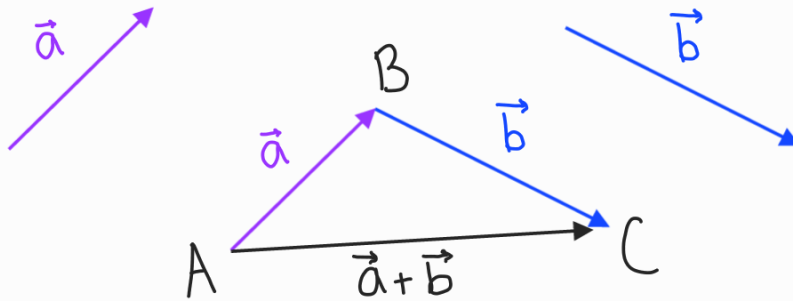
$$\vec{AB} \neq \vec{DC}, \text{ т.к. } \vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{DC}$$

- Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен** от точки A .
- От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

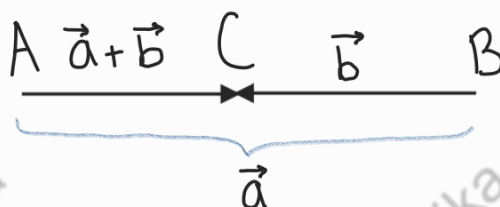
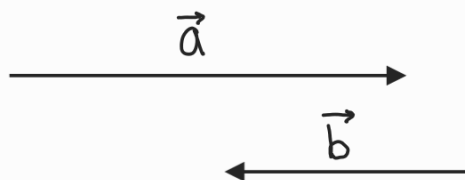
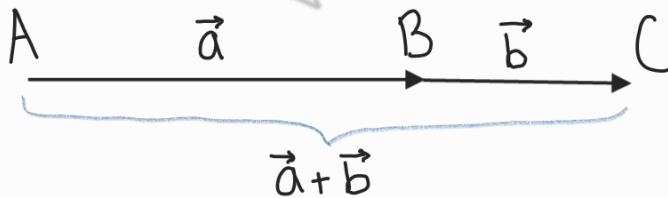
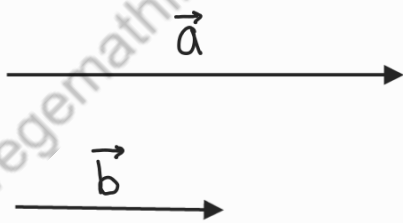


Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

- Введём правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. **Правило треугольника.**



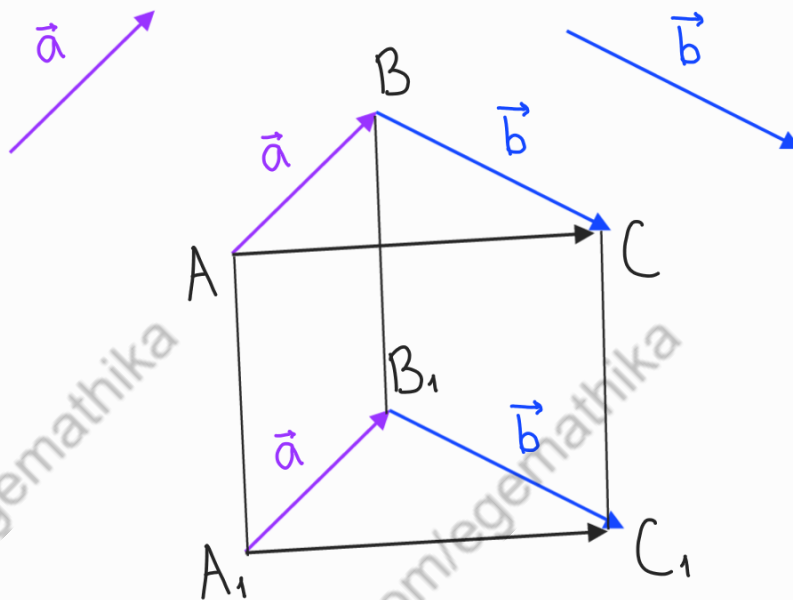
Неколлинеарные векторы



Коллинеарные векторы

Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

- Сумма $\vec{a} + \vec{b}$ не зависит от выбора точки A , от которой при сложении откладывается вектор a .



- Для любых трёх точек A, B и C имеет место равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также правилом параллелограмма:

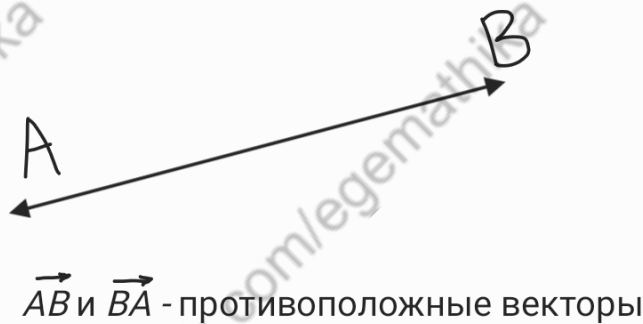


Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон)

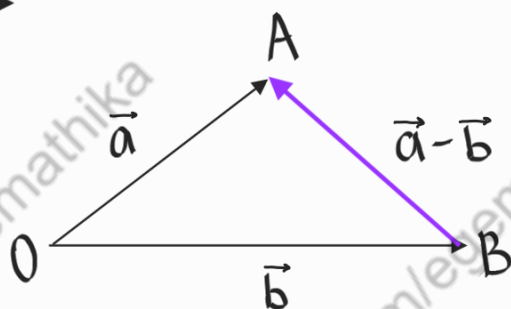
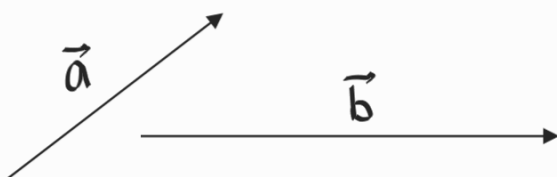
Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они противоположно направлены.



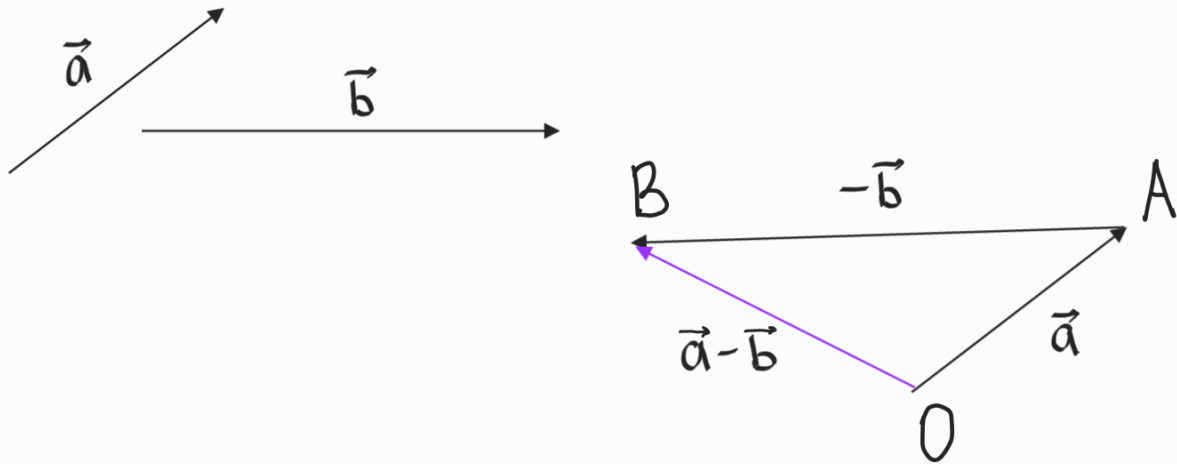
Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.

- **Разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

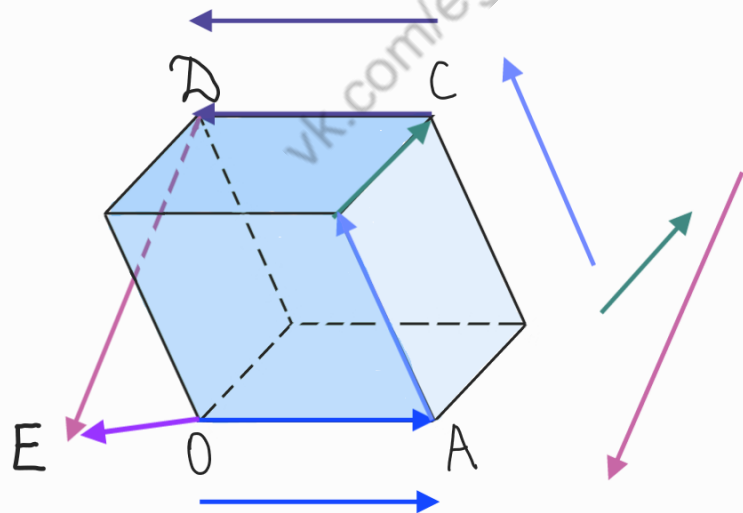
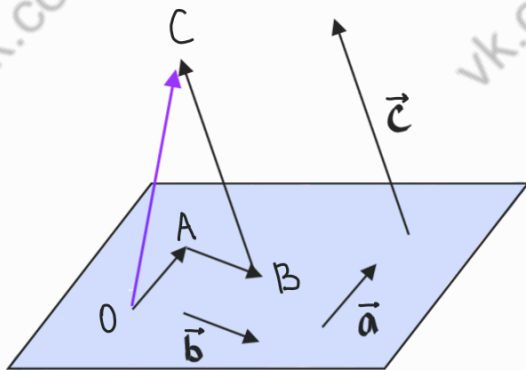
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.



- Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**



Правило многоугольника.

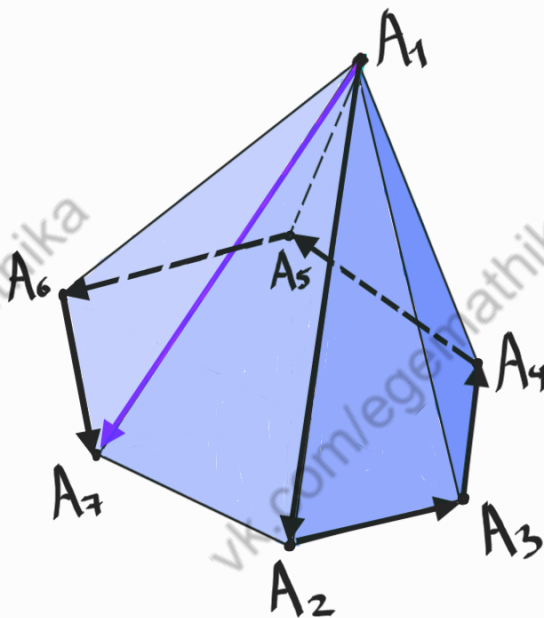
В отличие от случая векторов на плоскости, "многоугольник", который получается при построении суммы векторов в пространстве, может оказаться пространственным, т.е. таким, у которого не все вершины лежат в одной плоскости.

Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.

Правило многоугольника: если $A_1, A_2 \dots A_n$ — произвольные точки, то
 $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

(Если A_1 и A_n совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору.)

При $n=7$:



□ Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.

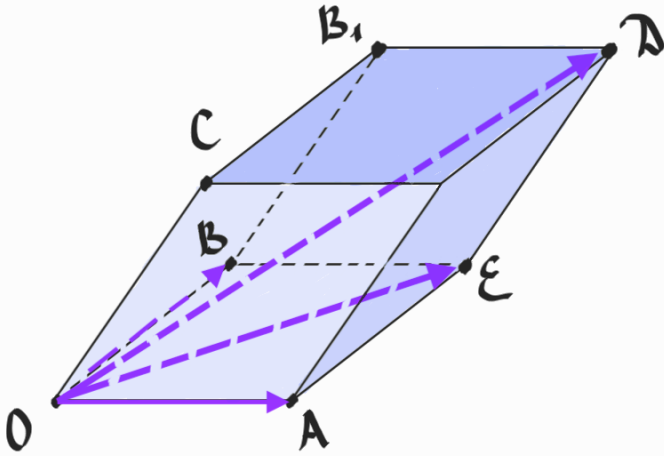
Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

□ Основные свойства умножения вектора на число:

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$	(сочетательный закон);
$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$	(первый распределит. закон);
$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$	(второй распределит. закон);

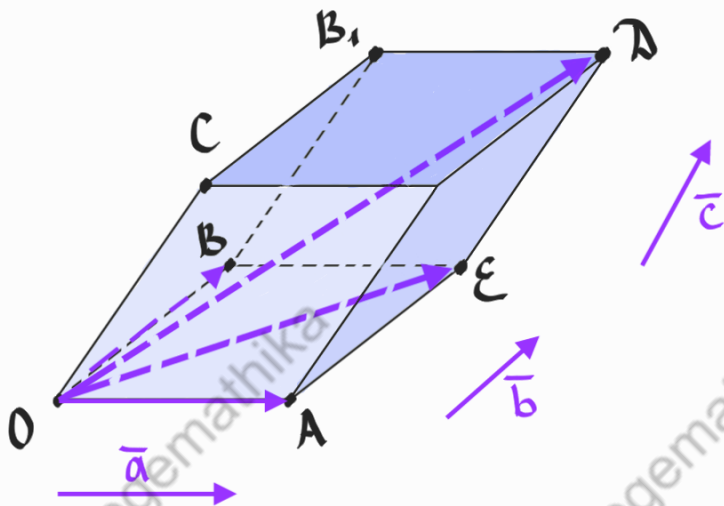
Компланарные векторы.

- Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.



- Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y - некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.
- Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Для сложения трёх некомпланарных векторов можно пользоваться **правилом параллелепипеда**:



Компланарные векторы

□ Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

где x , y и z - некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$** . Числа x , y , z называются **коэффициентами разложения**.

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

